Теоремы сложения и умножения вероятностей. Независимость событий. Условная вероятность.

1. Три стрелка стреляют по одной мишени, и каждый попадает или промахивается независимо от результатов выстрелов других стрелков. Вероятности попадания в мишень для каждого из стрелков, соответственно, равны: 0,8; 0,7; 0,5. Определить вероятности следующих событий:

а) все три стрелка попали в мишень;

б) хотя бы один стрелок попал в мишень;

в) в мишень попали два стрелка.

Решение.

а) Так как здесь рассматриваются независимые события, вероятность попадания в мишень всех трёх стрелков равна произведению вероятностей попадания каждого:

$$P = 0{,}8\times0{,}7\times0{,}5 = 0{,}28$$

б) Обозначим это событие $\boldsymbol{A}$. Ему благоприятствует несколько несовместимых исходов, например, такой: {первый стрелок попал в мишень, второй не попал, третий попал}. Вместо того, чтобы рассматривать все эти исходы, возьмём событие $\overline{A}$ – **дополнение события** A или, иначе, событие, противоположное событию $\boldsymbol{A}$. Оно состоит в том, что **все три стрелка не попали в мишень**. Его вероятность равна:

$$(1 - 0{,}8) \times (1 - 0{,}7) \times (1 - 0{,}5) = 0{,}5$$

Теперь можно определить вероятность интересующего нас события:

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

в) Этому событию благоприятствуют три исхода:

* {первый попал, второй попал, третий не попал} – с вероятностью

$$0{,}8 \times 0{,}7 \times (1 - 0{,}5) = 0{,}28$$

** {первый попал, второй не попал, третий попал} – с вероятностью

$$0{,}8 \times (1 - 0{,}7) \times 0{,}5 = 0{,}12$$

*** {первый не попал, второй попал, третий попал} – с вероятностью

$$(1 - 0{,}8) \times 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}07$$

Очевидно, что эти исходы несовместимы, и поэтому вероятность их объединения, представляющего собой событие A, равна сумме их вероятностей:

$$\mathrm{P(A)} = 0{,}28 + 0{,}12 + 0{,}07 = 0{,}47$$

2. Брошено три игральных кости. Найти вероятности следующих событий:

а) выпало три шестёрки;

б) выпало три шестёрки, если известно, что на одной из костей выпала шестёрка.

Решение.

а) Здесь ответ очевиден: $\left(\frac{1}{6}\right)^3$

б) Обозначим через А событие, состоящее в выпадении трёх шестёрок, а через В – в выпадении шестёрки хотя бы на одной кости. Тогда P(A/B) – искомая вероятность. Событие $A \cap B$ в данном случае совпадает с событием A, откуда следует: P($A \cap B$) = $\left(\frac{1}{6}\right)^3$. Вероятность события B равна разности единицы и вероятности события $\overline{B}$, противоположного событию В, то есть выпадения трёх чисел, отличных от шестёрки. Вероятность $\overline{B}$ равна $\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Отсюда следует: P(B) = $\frac{91}{216}$. В результате получается:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{91}$$

3. Истребитель атакует бомбардировщик, делает один выстрел и сбивает бомбардировщик с вероятностью p_1. Если этим выстрелом бомбар–дировщик не сбит, то он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью p_2. Если истребитель этим выстрелом не сбит, то он ещё раз стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_3. Найти вероятности следующих событий:

а) “сбит бомбардировщик”;

б) “сбит истребитель”;

в) “сбит хотя бы один самолёт”.

Ответ: а) $p_1 + (1-p_1)(1-p_2)p_3$; б) $(1-p_1)p_2$; в) $p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_2 - p_2p_3 + p_1p_2p_3$.

4. Из 20 студентов, находящихся в аудитории, 8 человек курят, 12 носят очки, а 6 и курят и носят очки. Одного из студентов вызвали к доске. Определим события А и В следующим образом: А = {вызванный студент курит}, В = {вызванный носит очки}.

Установить, зависимы события А и В или нет. Сделать предположение о характере влияния курения на зрение.

Решение. Так как $P(AB) = \frac{6}{20} \neq P(A)P(B) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20}$, то условие независимости не выполняется, следовательно, события А и В зависимы.

Найдем условную вероятность того, что студент носит очки, при условии, что он курит: $P(B/A) = \dfrac{P(BA)}{P(A)} = \dfrac{6/20}{8/20} = \dfrac{3}{4}$. Безусловная вероятность того, что студент носит очки, равна $P(B) = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$. Так как $P(B/A) > P(B)$, то делаем вывод: курение способствует ухудшению зрения.

6.Ф. Бросаются три игральных кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трёх костях выпали разные грани? (0.5).

7.Ф. Известно, что при бросании десяти игральных костей выпала хотя бы одна единица. Какова вероятность того, что выпало две или более единиц?

$1 - 10{\cdot}5^9/(6^{10}\text{-}5^{10})$.

8. Доказать, что если события A и B независимы, то независимы события $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

9. Бросают три монеты. Событие А — выпадение герба на первой и второй монетах. Событие В — выпадение цифры на третьей монете. Найти $P(A \cap B)$ и $P(A \cup B)$.

10. В некоторой корпорации протокол принятия важнейших решений предусматривает следующую процедуру. Предложение направляется в отдел **A**. В случае одобрения предложение направляется в отделы **B** и **C** а также к вице-президенту **D**. В случае одобрения вице-президентом предложение направляется президенту корпорации **P**. Сюда предложение попадает и в том случае, если после его одобрения хотя бы одним из отделов **B** или **C** его одобрит вице-президент **E**. Нарисовать схему принятия решения. Считая, что все инстанции принимают решение независимо одна от другой, и что **A**, **D** и **E** одобрят предложение с вероятностью 0,6, а **B**, **C** и **P** — с вероятностью 0,5, определить вероятность принятия предложения администрацией.

11. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачёт сдан, если студент ответит не менее чем на 3 из 4-х вопросов в билете. Взглянув на первый вопрос, студент обнаружил, что знает его. Какова вероятность, что студент сдаст зачёт?

Решение.

Пусть А – событие, заключающееся в том, что студент сдал экзамен;

В – событие, заключающееся в том, что студент знает первый вопрос в билете.

Очевидно, что $p(\text{B}) = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$. Теперь необходимо определить вероятность $p(\text{A} \cap \text{B})$. Из 25-ти вопросов всего можно составить A_{25}^4 различных билетов, содержащих 4 вопроса. Все билеты, выбор которых удовлетворял бы и событию А и событию В, должны быть составлены следующим образом: либо студент знает все вопросы билета (можно составить всего A_{20}^{4} таких билетов), либо студент знает первый, второй и третий вопросы, но не знает четвёртого (можно составить всего $5\,A_{20}^{3}$ таких билетов), либо студент знает первый, второй и четвёртый вопросы, но не знает третьего (тоже $5\,A_{20}^{3}$ билетов), либо студент знает первый, третий и четвёртый вопросы, но не знает второго (тоже $5\,A_{20}^{3}$ билетов). Отсюда получаем, что

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{A_{20}^{4} + 3\cdot 5\cdot A_{20}^{3}}{A_{25}^{4}} = \frac{6\cdot 8\cdot 19}{5\cdot 23\cdot 11}$$

Осталось только найти искомую вероятность $p(\mathrm{A}/\mathrm{B})$:

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{\dfrac{6\cdot 8\cdot 19}{5\cdot 23\cdot 11}}{\dfrac{4}{5}} = \frac{228}{253}$$