Классическое определение вероятности.

1. Колода из 32-х карт тщательно перетасована. Найти вероятность того, что все четыре туза лежат в колоде один за другим, не перемежаясь другими картами.

Решение. Число всех возможных способов расположения карт в колоде равно 32! Чтобы подсчитать число благоприятных исходов, сначала представим себе, что четыре туза располагаются каким-то образом один за другим и склеиваются между собой так, что они, как бы составляют одну карту (неважно, что она оказалась толще, чем все остальные). В полученной колоде стало 32 – 4 + 1 = 29 карт. Карты в этой колоде можно расположить числом способов, равным 29! Количество всех благоприятных исходов получается, если это число умножить на 4! – число возможных способов упорядочения четырёх тузов. Отсюда получаем ответ задачи: $\frac{29!4!}{32!} = \frac{1}{35960}$.

2. Между двумя игроками проводится n партий, причем каждая партия кончается или выигрышем, или проигрышем, и всевозможные исходы партий равновероятны. Найти вероятность того, что определённый игрок выиграет ровно m партий, $0 \le m \le n$.

Решение. Каждая партия имеет два исхода – выигрыш одного или другого участника. Для двух партий имеется $2^2 = 4$ исходов, для трёх партий – $2^3 = 8$ исходов, для n партий – 2^n исходов. Среди них ровно C_n^m исходов соответствуют выигрышу одного из игроков m партий. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{C_n^m}{2^n}$.

3. Бросается n игральных костей. Найти вероятность того, что на всех костях выпало одинаковое количество очков.

Решение. Общее число исходов здесь равно 6^n. Число благоприятных исходов – 6. Ответ задачи: $\frac{1}{6^{n-1}}$.

4. В урне a белых и b чёрных шаров ($a \ge 2$; $b \ge 2$). Из урны без возвращения извлекаются 2 шара. Найти вероятность того, что шары одного цвета.

Решение. Эта вероятность равна $\dfrac{C_a^2 + C_b^2}{C_{a+b}^2} = \dfrac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$

5. В урне находятся a белых и b черных шаров. Шары без возвращения извлекаются из урны. Найти вероятность того, что k-й вынутый шар оказался белым.

Решение. Представим процесс случайного извлечения шаров из урны следующим образом: шары произвольным образом размещены по расположенным в ряд ячейкам, и извлекаются из ячеек один за другим слева направо. Тогда благоприятный исход наступает в том случае, когда в k-й ячейке лежит белый шар.

Всего возможно $(a + b)!$ различных способов расположения шаров по ячейкам. Займём k-ю ячейку одним из белых шаров, что можно сделать a различными способами. Тогда остальные ячейки можно заполнить $(a + b - 1)!$ способами, и получается, что число благоприятных исходов равно $(a + b - 1)!a$, а искомая вероятность – $\dfrac{a}{a+b}$.

6. Найти вероятность того, что при размещении n различимых шаров по N ящикам заданный ящик будет содержать ровно k $(0 \le k \le n)$ шаров (все различимые размещения равновероятны).

Решение. Первый шар может быть размещён N различными способами, второй шар – тоже N различными способами, а два шара могут быть размещены по N ящикам числом способов, равным N^2. Всего существует N^n вариантов размещения n различимых шаров по N ящикам. Выбрав определенный ящик, можно найти C_n^k способов заполнить его набором k шаров, выбранных из множества n шаров. Остальные ящиков можно заполнить оставшимися $n-k$ шарами числом способов, равным $(N-1)^{n-k}$. Таким образом получаем, что число благоприятных исходов в задаче равно $C_n^k(N-1)^{n-k}$, а интересующая нас вероятность равна $\dfrac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^k}$.

7. 10 букв разрезной азбуки: А,А,А,Е,И,К,М,М,Т,Т произвольным образом выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МАТЕМАТИКА?

Решение. 10 букв можно расположить в ряд числом способов, равным 10! Чтобы получить число благоприятных исходов, нужно взять слово МАТЕМАТИКА и убедиться в том, что его можно получить, переставляя местами 3 буквы А, 2 буквы М и 2 буквы Т, что можно сделать 3!2!2! способами Ответ задачи: 3!2!2!/10!.

8. Брошено 10 игральных костей. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти вероятность того, что выпала хотя бы одна “6”.

Решение. Общее число исходов здесь равно 6^{10}. К благоприятным исходам следует отнести выпадение одной, двух, трёх и т. д. шестёрок. Проще подсчитать число неблагоприятных исходов, то есть исходов, когда не выпало ни одной шестёрки. Их, очевидно, 5^{10}, и число благоприятных исходов равно $6^{10} - 5^{10}$. Искомая вероятность равна $1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}$.

9. В мешке находятся 10 различных пар обуви. Из мешка наугад извлекаются 6 единиц обуви. Найти вероятность того, что в выборку не попадёт двух единиц обуви, составляющих одну пару.

Решение. Общее число исходов – это количество возможных выборок объёмом в 6 единиц из общего числа в 20 единиц, то есть C_{20}^{6} – число сочетаний из двадцати по шесть. Подсчитаем число благоприятных исходов. Очевидно, что все возможные выборки, удовлетворяющие условию задачи, можно составить следующим образом: выбрать 6 пар обуви, что осуществляется числом способов, равным C_{10}^{6}, затем из каждой пары выбрать одну единицу. Из одной пары это можно сделать двумя способами, из двух – четырьмя, из трёх – восемью и т. д. Таким образом можно перебрать все $C_{10}^{6}2^{6}$ шестёрок, удовлетворяющих условию задачи. Искомая вероятность равна $\frac{C_{10}^{6}2^{6}}{C_{20}^{6}}$.

1.а. В условиях задачи 1. подсчитать вероятность того, что при раздаче карт по одной по кругу четырём игрокам каждому достанется один туз. $\left(\frac{13^4 4!48!}{52!} = \frac{13\cdot13\cdot13}{17\cdot25\cdot49} \approx 0{,}1055,\ \ \frac{13^4 4!}{C_{52}^{4}4!}\right)$

1.б. В условиях предыдущей задачи подсчитать вероятность того, что все тузы достанутся одному игроку.

1.в. n лиц рассаживаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность, что два определенных лица окажутся рядом? Найти соответствующую вероятность , если те же лица садятся за круглый стол.

2.а. Решите задачу 2. при условии, что каждая партия кончается либо выигрышем одного из участников, либо ничьей, и всевозможные исходы партий равновероятны.

2.б. В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

3.а. Брошены шесть игральных костей. Найти вероятность следующих событий:

а) на всех костях выпало разное количество очков;

б) суммарное количество выпавших очков равно 7.

3.б. Найти вероятность того, что среди произвольно выбранных 12-ти человек все имеют дни рождения в разные месяцы.

4.а. В условиях задачи 4. найти вероятность того, что шары разноцветные.

5.а. В кармане лежат 10 ключей, из которых к данному замку подходит лишь один, но неизвестно, какой. Из кармана извлекаются ключи случайным образом один за другим и делается попытка открыть замок. Найти вероятность того, что замок будет открыт с 7-й попытки.

5.б. Студент Иванов при подготовке к экзамену из 30-и билетов выучил лишь 20. Группа сдающих экзамен студентов состоит из 16-и человек, причём каждый по очереди берёт один билет, не возвращая его. В каком случае студент Иванов с большей вероятностью сдаст экзамен: если он будет в этой очереди первым или если он будет последним?

5.в. Партия из 25-и приборов содержит один неисправный прибор. Из этой партии для контроля выбраны случайным образом 6 приборов. Найти вероятность того, что неисправный прибор попал в выборку.

5.г. Ящик содержит 90 годных и 10 дефектных шурупов. Если использовать 10 шурупов, какова вероятность того, что ни один из них не окажется дефектным? Какова вероятность того, что среди них окажется 4 дефектных шурупа?

6.а. В n ящиках размещают n шаров так, что для каждого шара равновозможно попадание в любой ящик. Найти вероятность того, что ни один ящик не пуст.

6.б. Каждая из n палок разламывается на две части – длинную и короткую. Затем $2n$ обломков объединяются в n пар, каждая из которых образует новую "палку". Найти вероятность того, что а)части будут соединены в первоначальном порядке; б) все длинные части будут соединены с короткими.

6.в.Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд спортсменов разбиваются на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах, б) в одной подгруппе. Ответ: а) $n/(2n-1)$; б) $(n-1)/(2n-1)$;

7.а. Из букв разрезной азбуки составлено слово СТАТИСТИКА. Затем из этих букв случайным образом без возвращения отобрано 5 букв. Найти вероятность того, что из отобранных букв можно составить слово ТАКСИ. Ответ 2/21.

8.а. Чему равна вероятность того, что два бросания трёх игральных костей дадут один и тот же результат, если а) кости различимы, б) кости неразличимы. Ответ: 1/216; 83/3888.

8.б. Из 28 костей домино случайным образом выбираются две. Найти вероятность того, что из них можно составить "цепочку" согласно правилам игры. Ответ: 7/18.

8.в. Брошено 10 игральных костей. Найти вероятность событий: а) выпало ровно 3 шестёрки, б) выпало хотя бы две шестёрки.

9.а. Два игрока независимым образом подбрасывают (каждый свою) монеты. Найти вероятность того, что после n подбрасываний у них будет одно и то же число гербов. Ответ: $\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}$.

Решение задачи 1.а.

1-й способ. При перетасовке колоды карты в ней можно расположить 32! различными способами. Первый игрок получит туза определённой масти (например, туза пик), если этот туз лежит в колоде на 1-м, 5-м, 9-м и т. д. местах. Иначе говоря, туз пик попадает к первому игроку, если он занимает в колоде одну из восьми возможных позиций. Аналогичным образом другой туз, например масти треф, достаётся второму игроку, если он в колоде лежит вторым, шестым, десятым и т. д., то есть также занимает в колоде одну из восьми возможных позиций. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что для выполнения условия задачи карты в колоде должны быть расположены одним из $8^4 4!28!$ возможных способов. Отсюда следует, искомая вероятность равна

$$\frac{8^4 4!28!}{32!} = \frac{512}{31 \cdot 5 \cdot 29} \cong 0{,}114$$

2-й способ. Разобьём колоду на 4 части по 8 карт в каждой. Это можно сделать числом способов, равным $C_{32}^{8} C_{24}^{8} C_{16}^{8}$. Первую из этих частей при условии, что в неё попадает один и только один туз, например туз пик, можно составить числом способов, равным C_{28}^{7}. Вторую часть при условии попадания в неё единственного туза можно составить числом способов, равным C_{21}^{7}. Таким образом, разделить колоду на 4 части, удовлетворяющие условию задачи, можно числом способов, равным $C_{28}^{7} C_{21}^{7} C_{14}^{7} 4!$. Отсюда следует, что искомая вероятность равна

$$\frac{C_{28}^{7} C_{21}^{7} C_{14}^{7} 4!}{C_{32}^{8} C_{24}^{8} C_{16}^{8}} = \frac{512}{31 \cdot 5 \cdot 29} \approx 0{,}114$$

111. При игре в покер из колоды в 52 карты игроку выдаётся 5 карт. Какова вероятность того, что игрок получит комбинацию из одной тройки (три карты одной номинации) и одной двойки (две карты одной номинации). (Такая комбинация называется *full house*).

112. В условиях предыдущей задачи подсчитать вероятность получения игроком одной двойки, двух двоек.

113. В условиях задачи 111 подсчитать вероятность получения игроком комбинации *straight*, то есть пяти карт последовательной номинации, но не всех одной масти (например, 5 треф, 6 пик, 7 треф, 8 червей, 9 бубен или валет пик, дама пик, король пик, туз червей, двойка треф)

$$\frac{13 C_4^3 \cdot 12 C_4^2}{C_{52}^5}; \ \frac{13 C_4^2 C_{12}^3 4^3}{C_{52}^5}; \ \frac{10 \cdot 4^5 - 40}{C_{52}^5}.$$