# Непрерывные случайные величины.

Случайная величина, значения которой заполняют некоторый промежуток, называется непрерывной.

В частных случаях это может быть не один промежуток, а объединение нескольких промежутков. Промежутки могут быть конечными, полу-бесконечными или бесконечными, например: $(a; b]$, $(-\infty; a)$, $[b;\infty)$, $(-\infty; \infty)$.

Вообще непрерывная случайная величина – это абстракция. Снаряд, выпущенный из пушки, может пролететь любое расстояние, скажем, от 5 до 5,3 километров, но никому не придёт в голову измерять эту величину с точностью до 0,0000001 километра (то есть до миллиметра), не говоря уже об абсолютной точности. В практике такое расстояние будет дискретной случайной величиной, у которой одно значение от другого отличается по крайней мере на 1 метр.

При описании непрерывной случайной величины принципиально невозможно выписать и занумеровать все её значения, принадлежащие даже достаточно узкому интервалу. Эти значения образуют несчётное множество, называемое «континуум».

Если $\xi$ – непрерывная случайная величина, то равенство $\xi = x$ представляет собой, как и в случае дискретной случайной величины, некоторое случайное событие, но для непрерывной случайной величины это событие можно связать лишь с вероятностью, равной нулю, что однако не влечёт за собой невозможности события. Так например, можно говорить, что только с вероятностью «нуль» снаряд пролетит 5245,7183 метра, или что отклонение действительного размера детали от номинального составит 0,001059 миллиметра. В этих случаях практически невозможно установить, произошло событие или нет, так как измерения величин проводятся с ограниченной точностью, и в качестве результата измерения можно фактически указать лишь границы более или менее узкого интервала, внутри которого находится измеренное значение.

Значениям непрерывной случайной величины присуща некоторая неопределенность. Например, нет практического смысла различать два отклонения от номинального размера, равные 0,5 мм и 0,5000025 мм. Вероятность, отличная от нуля, может быть связана только с попаданием величины в заданный, хотя бы и весьма узкий, интервал. Здесь можно привести сравнение с распределением массы вдоль стержня. Отсутствует масса, сосредоточенная, скажем, в сечении, расположенном на расстоянии 20 см от левого конца стержня, имеет смысл говорить лишь о массе, заключённой между сечениями, проходящими через концы некоторого промежутка.

Пусть $\xi$ – непрерывная случайная величина. Рассмотрим для некоторого числа $x$ вероятность неравенства $x < \xi < x + \Delta x$

$$P(x < \xi < x + \Delta x).$$

Здесь $\Delta x$ – величина малого интервала.

Очевидно, что если $\Delta x \to 0$, то $P(x < \xi < x + \Delta x) \to 0$. Обозначим $p(x)$ предел отношения $P(x < \xi < x + \Delta x)$ к при $\Delta x \to 0$, если такой предел существует:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = p(x) \tag{1}$$

Функция $p(x)$ называется плотностью распределения случайной величины. Из формулы (1) следует равенство, справедливое для малых величин $\Delta x$, которое также можно считать определением функции $p(x)$:

$$P(x < \xi < x + \Delta x) \cong p(x)\Delta x \tag{2}$$

Очевидно, что $p(x)$ – неотрицательная функция. Для определения вероятности того, что случайная величина $\xi$ примет значение из промежутка $[a, b]$ конечной длины, нужно выбрать на промежутке произвольные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяющие условию $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n<b=x_{n+1}$. Эти числа разобьют промежуток $[a, b]$ на $n+1$ частей, представляющих собой промежутки $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2)$, …,$[x_n, b]$. Введём обозначения:

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0,\ \Delta x_1 = x_2 - x_1,\ \dots,\ \Delta x_n = b - x_n,$$

и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x_i$ . Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что максимальная величина $\Delta x_i$ стремится к нулю. Будем считать функцию $p(x)$ непрерывной на промежутке $(a; b)$, тогда пределом суммы $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x_i$ будет определённый интеграл по промежутку $[a; b]$ от функции $p(x)$, равный искомой вероятности:

$$P(a \le \xi \le b) = \int_a^b p(x)dx \tag{3}$$

Это равенство можно также рассматривать как определение функции $p(x)$. Отсюда следует, что вероятность попадания случайной величины в любой интервал $(x_1, x_2)$ равна площади фигуры, образованной отрезком $[x_1, x_2]$ оси $x$, графиком функции $p(x)$ и вертикальными прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, как изображено на рисунке 1.

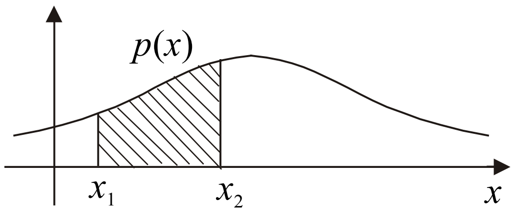

Рис. 1

Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то для $p(x)$ – её плотности распределения справедливо равенство

$$\int_a^b p(x)dx = 1$$

Для удобства иногда считают функцию $p(x)$ определённой для всех значений $x$, полагая её равной нулю в тех точках $x$, которые не являются возможными значениями этой случайной величины.

Плотностью распределения может служить любая интегрируемая функция $p(x)$, удовлетворяющая двум условиям:

1) $p(x) \ge 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$

Можно задавать случайную величину, задавая функцию $p(x)$, удовлетворяющую этим условиям.

В качестве примера рассмотрим случайную величину $\xi$, равномерно распределённую на промежутке $[a; b]$. В этом случае $p(x)$ постоянна внутри этого промежутка:

$$p(x)=\begin{cases} c & a \le x \le b \\ 0 & x < a; x > b \end{cases}$$

По свойству 2) функции $p(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_a^b c dx = c(b-a) = 1$$

Отсюда $c=\dfrac{1}{b-a}$. График функции $p(x)$ представлен на рисунке 2.

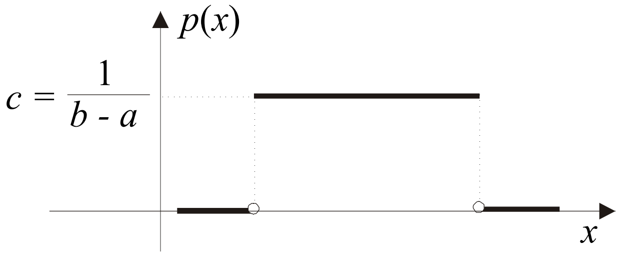

Рис. 2

Во многих практических задачах встречаются случайные величины, у которых возможные значения не ограничены сверху и снизу. В этом случае кривая распределения располагается над осью $x$ и при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ асимптотически приближается к этой оси, как изображено на рисунке 1. Вероятность того, что случайная величина $\xi$ примет значение, меньшее некоторого числа $a$, равна площади фигуры, заключённой между кривой распределения и горизонтальной координатной осью слева от точки $a$. Будем считать, что такая площадь существует.

Пусть $\xi$ – непрерывная случайная величина. Функция $F(x)$, которая определяется равенством

$$F(x) = P(\xi \le x),$$

называется **интегральной функцией распределения** или просто **функцией распределения** случайной величины $\xi$. Непосредственно из определения следует равенство $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$. Формула производной определённого интеграла по верхнему пределу в данном случае приводит к соотношению $F'(x)=p(x)$. Плотность распределения $p(x)$ называют **дифференциальной функцией распределения.**

Функция распределения $F(x)$ случайной величины $\xi$ имеет следующие свойства.

1. $F(x)$ — непрерывная возрастающая функция.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Свойства 1 и 2 вытекают непосредственно из определения функции $F(x)$.

3. Приращение $F(x)$ на промежутке $(x_1;\ x_2)$ равно вероятности того, что случайная величина $\xi$ принимает значение из этого промежутка:

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \le x_2)$$

Доказательство.

$$F(x_2) = P(\xi \le x_2) = P(\xi \le x_1) + P(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_1) + P(x_1 < \xi \le x_2)$$

Отсюда

$$P(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Заметим, что для непрерывной случайной величины $\xi$ справедливы равенства

$$P(x_1 < \xi \le x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi \le x_2)$$

Для равномерного распределения функция $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a \\ \int\limits_a^x \dfrac{dt}{b-a} = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при}\ a < x < b \\ 1 & \text{при} \quad x \ge b \end{cases}$$

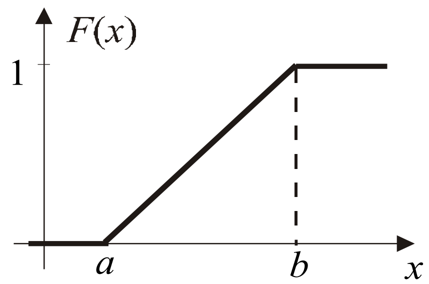

Рис. 3

График функции $F(x)$ представлен на рисунке 3.

Закон распределения непрерывной случайной величины можно определить заданием либо функции $p(x)$, либо функции $F(x)$.