Биномиальный закон распределения.

Пусть заданы числа $n \in N$ и p ($0 \le p \le 1$). Тогда каждому целому числу из промежутка $[0; n]$ можно поставить в соответствие вероятность, рассчитанную по формуле Бернулли. Получим закон распределения случайной величины (назовём её β)

β	0	…	k	…	n
P	…	…	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	…	…

Будем говорить, что случайная величина β распределена по закону Бернулли. Такой случайной величиной является частота появления события А в n повторных независимых испытаниях, если в каждом испытании событие А происходит с вероятностью p.

Рассмотрим отдельное i-е испытание. Пространство элементарных исходов для него имеет вид

$$\Omega = \{A, \overline{A}\}$$

Определим на этом пространстве случайную величину ξ_i следующим образом:

$\xi_i = 1$, если происходит событие A;

$\xi_i = 0$, если происходит событие $\overline{A}$

Закон распределения случайной величины ξ_i рассматривался в предыдущем параграфе.

ξ_i	1	0
P	p	$q = 1-p$

$$M\xi = \cdot p;\ D\xi = pq$$

Для $i = 1,2,\ldots,n$ получаем систему из n независимых случайных величин ξ_i, имеющих одинаковые законы распределения. Если теперь сравнить законы распределения двух случайных величин β и $\sum_{i=1}^{n} \xi i$, то можно сделать очевидный вывод: β = $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Отсюда следует, что для случайной величины β, имеющей закон распределения Бернулли, математическое ожидание и дисперсия определяются формулами

$$M\beta = M\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}M\xi_{\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{n}p = np;$$

$$D\beta = D\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}D\xi_i = \sum_{i=1}^{n}pq = npq$$

Найдём оценку величины p — вероятности успеха в одном испытании некоторого биномиального эксперимента. Для этого проведём n испытаний и подсчитаем x – число успехов. Оценку p^* неизвестной величины p определим формулой $p^* = \frac{x}{n}$.

Пример.

Из 20 отобранных для контроля образцов продукции 4 оказались нестандартными. Оценим вероятность того, что случайно выбранный экземпляр продукции не отвечает стандарту отношением $p^* = 4/20 = 0{,}2$.

Так как x случайная величина, p^* – тоже случайная величина. Значения p^* могут меняться от одного эксперимента к другому (в рассматриваемом случае экспериментом является случайный отбор и контроль 20-ти экземпляров продукции). Каково математическое ожидание p^*? Поскольку x есть случайная величина, обозначающая число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли, $Mx = np$. Для математического ожидания случайной величины p^* по определению получаем: $Mp^* = M\left(\frac{x}{n}\right)$, но n здесь является константой, поэтому по свойству математического ожидания

$$Mp^* = \frac{1}{n}Mx = \frac{1}{n}np = p$$

Таким образом, “в среднем” получается истинное значение p, чего и следовало ожидать. Это свойство оценки p^* величины p имеет название: p^* является **несмещённой** оценкой для p. Отсутствие систематического отклонения от величины оцениваемого параметра p подтверждает целесообразность использования величины p^* в качестве оценки. Вопрос о точности оценки пока оставляем открытым.