Дискретные случайные величины.

Часто результатом случайного эксперимента является число. Например, можно подбросить игральную кость и получить одно из чисел: 1,2,3,4,5,6. Можно подъехать к бензоколонке и обнаружить определённое число автомашин в очереди. Можно выстрелить из пушки и измерить расстояние от места выстрела до места падения снаряда. В таких случаях будем говорить, что имеем дело со случайной величиной.

Каждому исходу случайного эксперимента поставим в соответствие единственное число x_k — значение случайной величины. Тогда **естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов случайного эксперимента.**

Случайная величина, которая может принимать лишь конечное или счётное число значений, называется **дискретной**.

Случайные величины будем обозначать буквами греческого алфавита: ξ (кси), η (эта), … Значения случайной величины будем записывать в виде конечной или бесконечной последовательности $x_1, x_2,\dots, x_n,\dots$

Если говорится, что задана случайная величина ξ, это значит, что каждому исходу ω_k случайного эксперимента поставлено в соответствие единственное число x_k, что записывается в виде равенства $x_k = \xi(\omega_k)$.

Некоторые из значений x_k могут совпадать, то есть различным исходам ω может соответствовать одно и то же число x. Если все значения случайной величины совпадают, то будем говорить, что случайная величина постоянна.

Пусть A_k — множество всех элементарных исходов, каждому из которых соответствует значение x_k ($k = 1,2,\dots,n$) случайной величины ξ. Этот факт можно записать в виде формулы

$$A_k = \bigcup_{i:\xi(\omega_i)=x_k} \omega_i$$

Таким образом, A_k – это событие (строго говоря, это верно лишь в случае конечного или счётного числа исходов). Для каждого события A_k определим число $p_k \geq 0$, равное вероятности этого события: $p_k = P(A_k)$. Очевидно, что

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega,\ A_i \cap A_j = \varnothing\ \ (i,j = 1,2,\dots,n,\ i \neq j),\ \ \sum_{i=1}^{n} p_k = 1.$$

Теперь каждому значению x_k случайной величины ξ можно поставить в соответствие вероятность $p_k = P(A_k)$ события A_k. Если такое соответствие определено то будем говорить, что задан **закон распределения** дискретной случайной величины ξ. Обычно закон распределения дискретной случайной величины представляется в виде таблицы

ξ	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

(1)

В дальнейшем для краткости будем называть величину p_i вероятностью значения x_i случайной величины. Отметим, что закон распределения содержит всю информацию о случайной величине, и задать случайную величину можно, просто представив её закон распределения.

Пусть две случайные величины

$$\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; \;\; \eta = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \qquad (2)$$

определены на одном и том же пространстве элементарных исходов. Если A_i ($i = 1,2,\ldots,n$) – событие, объединяющее все исходы, приводящие к значению x_i случайной величины ξ, а B_j ($j = 1,2,\ldots,m$) – событие, объединяющее все исходы, приводящие к значению y_i случайной величины η, то можно определить случайную величину $\zeta = \xi + \eta$, которая принимает все возможные значения $z_i^j = x_i + y_j$. Каждому такому значению z_i^j случайной величины ζ ставится в соответствие вероятность p_i^j, равная вероятности пересечения событий A_i и B_j:

$$p_i^j = P(A_i \cap B_j).$$

Таким образом определяется закон распределения суммы двух случайных величин. Также можно определить законы распределения разности $\xi - \eta$, произведения $\xi\eta$ и частного $\frac{\xi}{\eta}$ случайных величин (последний лишь в случае, если η не принимает нулевого значения).

Две случайные величины

$$\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; \;\; \eta = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\},$$

определённые на одном и том же пространстве элементарных исходов, имеющие законы распределения

ξ	x_1	…	x_i	…
P	p_1^1	…	p_i^1	…

η	y_1	…	y_j	…
P	p_1^2	…	p_j^2	…

называются **независимыми**, если при любых i и j выполняется равенство

$$P((\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)) = p_i^1 \, p_j^2$$

Пример1. Брошены две игральных кости. Число очков, выпавшее на первой кости, – случайная величина ξ. Число очков, выпавшее на второй кости

– случайная величина η. Считаем, что все исходы $((\xi = i)\cap(\eta = j))$ ($i = 1,2,\ldots,6$; $j = 1,2, \ldots,6$) равновероятны, всего их 36, поэтому

$$P((\xi = i)\cap(\eta = j)) = \frac{1}{36}$$

Так как $P(\xi = i) = \frac{1}{6}$ и $P(\eta = j)) = \frac{1}{6}$, очевидно, что по определению ξ и η – независимые случайные величины.

Пример 2. Даны две независимые случайные величины ξ и η с заданными законами распределения

ξ	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

η	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Определим случайные величины α и β следующим образом: $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi\eta$. Выясним, являются ли независимыми случайные величины α и β.

Составим закон распределения α. Наименьшее значение α равняется 1. Вероятность события $\alpha = 1$ равна вероятности события $(\xi = 0)\cap(\eta = 1)$, которая в силу независимости ξ и η равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$. Событие $\alpha = 2$ совпадает с событием $((\xi = 0)\cap(\eta = 2))\cup((\xi = 1)\cap(\eta = 1))$. Его вероятность равна

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

Максимальное значение α, равное 3, имеет вероятность $\frac{1}{2}$. Таким образом, закон распределения случайной величины α можно представить таблицей

α	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$

Закон распределения β представляется таблицей

β	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

Рассмотрим события $\alpha = 3$ и $\beta = 0$. Очевидно, что

$$P(\alpha = 3)\ P(\beta = 0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

С другой стороны, событие $(\alpha = 3)\cap(\beta = 0)$ – невозможное, так как $\alpha = 3$ только при $\xi = 1$, а $\beta = 0$ лишь при $\xi = 0$. Отсюда следует, что

$$P((\alpha = 3)\cap(\beta = 0)) = 0,$$

и теперь ясно, что, по крайней мере, в одном случае условие определения независимости для случайных величин α и β не выполняется. Отсюда следует, что эти случайные величины зависимы.

Математическое ожидание случайной величины.

Пусть задан закон распределения случайной величины ξ.

ξ	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Математическое ожидание $M\xi$ (или $M(\xi)$) случайной величины ξ определяется формулой

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Рассмотрим пример. Пусть в некотором магазине, торгующем электробытовой техникой, получены статистические данные о числе проданных холодильников в каждый день месяца (условно считаем, что месяц состоит из 30 рабочих дней). Эти данные собраны в таблицу

Количество проданных холодильников	0	1	2	3	4	5
Число дней, в которые было продано столько холодильников	3	7	8	9	2	1

По этой таблице легко подсчитать число холодильников, проданных в магазине за месяц: 0*1+1*7+2*8+3*9+4*2+5*1 = 63. Чтобы подсчитать среднее число холодильников, продававшихся в один день месяца, нужно эту сумму разделить на 30, в результате получим 2,1. Если в приведенной таблице каждое число второй строки поделить на 30, то получится последовательность дробей

$$\frac{1}{10}; \frac{7}{30}; \frac{4}{15}; \frac{3}{10}; \frac{1}{15}; \frac{1}{30},$$

каждая из которых представляет собой так называемую **относительную частоту**, с которой в данный месяц появлялся приведенный в верхней строке объём продаж. Очевидно, что если просуммировать все произведения чисел, стоящих в первой строке таблицы, на их относительные частоты, то получится то же среднее число продававшихся в один день холодильников:

$$0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{7}{30} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{1}{15} + 5 \cdot \frac{1}{30} = 2{,}1$$

Если бы в последней формуле относительные частоты рассчитывались не для одного месяца, а для существенно большего срока, то при некоторых условиях (например, при отсутствии кризисных явлений, существенно влияющих на спрос населения на дорогостоящие товары) эти относительные частоты можно было бы считать довольно близкими к вероятностям соответствующих значений объёма продаж. Таким образом, приходим к выводу, что математическое ожидание случайной величины – это в некотором смысле её среднее значение. Следует отметить, что случайная величина может вообще не принимать значения, равного её математическому ожиданию. Так, например, случайная величина, принимающая только значения 1 и –1, каждое – с вероятностью 0,5, имеет математическое ожидание, равное нулю.

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины, заданной законом распределения

ξ	1	0
P	p	q

Здесь p + q = 1.

$$M\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Свойства математического ожидания.

1. Если случайная величина ξ принимает одно и то же значение при всех исходах случайного эксперимента, то есть $\xi \equiv C$, то её математическое ожидание равно C.
2. Если $M\xi = a$, и k – константа, то $M(k\xi) = kM\xi$ (математическое ожидание случайной величины, умноженной на число, равно математическому ожиданию случайной величины, умноженному на это число).
3. Если $M\xi = a$, и k – константа, то $M(k + \xi) = k + M\xi$ (математическое ожидание суммы случайной величины и числа равно сумме этого числа и математического ожидания случайной величины).

Выведем формулу для математического ожидания суммы двух случайных величин ξ и η, определённых на одном и том же пространстве элементарных исходов и заданных законами распределения

ξ	x_1	…	x_n
P	p_1^1	…	p_n^1

η	y_1	…	y_k
P	p_1^2	…	p_k^2

$M(\xi + \eta) = (x_1 + y_1)P((\xi = x_1) \cap (\eta = y_1)) + (x_2 + y_1)P((\xi = x_2) \cap (\eta = y_1)) + \ldots$
$+ (x_i + y_j)P((\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)) + \ldots + (x_n + y_k)P((\xi = x_n) \cap (\eta = y_k))$

Очевидно, что сумма в правой части последней формулы содержит nk слагаемых. Преобразуем эту сумму следующим образом:

$M(\xi + \eta) = x_1 P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)) + x_1 P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)) +\ldots+ x_1 P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_k)) +$
$+ x_2P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_1)) + x_2P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_2)) +\ldots + x_2P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_k)) + \ldots$
$+ x_nP((\xi=x_n)\cap(\eta=y_1)) + x_nP((\xi=x_n)\cap(\eta=y_2)) +\ldots + x_nP((\xi=x_n)\cap(\eta=y_k)) +$
$+ y_1P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)) + y_1P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_1)) +\ldots + y_1P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_1)) +$
$+ y_2P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)) + y_2P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_2)) +\ldots + y_2P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_2)) + \ldots$
$+ y_kP((\xi=x_1)\cap(\eta=y_k)) + y_kP((\xi=x_2)\cap(\eta=y_k)) +\ldots + y_kP((\xi=x_n)\cap(\eta=y_k)) =$
$= x_1(P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)) + P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)) +\ldots + P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_k))) +$
$+ x_2(P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_1)) + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_2)) +\ldots + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_k))) +\ldots +$
$+ x_n(P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_1)) + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_2)) +\ldots + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_k))) +$
$+ y_1(P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)) + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_1)) +\ldots + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_1))) +$
$+ y_2(P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)) + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_2)) +\ldots + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_2))) + \ldots$
$+ y_k(P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_k)) + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_k)) +\ldots + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_k))) =$
$= x_1P(\xi=x_1) + x_2P(\xi=x_2) +\ldots+ x_n P(\xi=x_n) +$
$+ y_1P(\eta=y_1) + y_2P(\eta=y_2) +\ldots+ y_1P(\eta=y_1) = M\xi + M\eta$

При выводе этой формулы использован очевидный факт, что, например, событие $\xi=x_1$ можно представить в виде объединения несовместных событий $(\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)$, $(\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)$, …, $(\xi=x_1)\cap(\eta=y_n)$.

Пример.

Заданы n одинаково распределённых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с законом распределения

ξ_i	1	0
P	p	q

Найти математическое ожидание суммы этих случайных величин.

Решение.

$$M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}M\xi_i = np$$

Теорема.

Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$M(\xi\eta) = M\xi\cdot M\eta$$

Доказательство.

Если заданы законы распределения двух независимых случайных величин ξ и η

ξ	x_1	…	x_i	…	x_n
P	p_1^1	…	p_i^1	…	p_n^1

η	y_1	…	y_j	…	y_k
P	p_1^2	…	p_j^2	…	p_k^2

то математическое ожидание произведения этих случайных величин можно представить следующим образом:

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j p_i^1 p_j^2 =$$

$$= x_1 p_1^1 \sum_{j=1}^{k} y_j p_j^2 + x_2 p_2^1 \sum_{j=1}^{k} y_j p_j^2 + \ldots + x_i p_i^1 \sum_{j=1}^{k} y_j p_j^2 \ldots + x_n p_n^1 \sum_{j=1}^{k} y_j p_j^2 =$$

$$= x_1 p_1^1 M\eta + x_2 p_2^1 M\eta + \ldots + x_i p_i^1 M\eta \ldots + x_n p_n^1 M\eta = M\eta \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = M\xi \cdot M\eta$$

Дисперсия случайной величины.

Дисперсия $D\xi$ случайной величины ξ определяется формулой

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

Дисперсия случайной величины — это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

Рассмотрим случайную величину ξ с законом распределения

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Вычислим её математическое ожидание.

$$M\xi = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

Составим закон распределения случайной величины $\xi - M\xi$

$\xi - M\xi$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

а затем закон распределения случайной величины $(\xi - M\xi)^2$

$(\xi - M\xi)^2$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{49}{36}$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Теперь можно рассчитать величину $D\xi$:

$$D\xi = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2} + \frac{25}{36}\cdot\frac{1}{3} + \frac{49}{36}\cdot\frac{1}{6} = \frac{17}{36}$$

Используя определение дисперсии, для дискретной случайной величины формулу вычисления дисперсии можно представить в таком виде:

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 p_i$$

Можно вывести ещё одну формулу для вычисления дисперсии:

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i{}^2 - 2x_i M\xi + M^2\xi\right)p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 p_i - 2M\xi\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + M^2\xi\sum_{i=1}^{n}p_i = M\xi^2 - 2M\xi\cdot M\xi + M^2\xi =$$

$$= M\xi^2 - M^2\xi$$

Таким образом, дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Пример.

Найти дисперсию случайной величины, заданной законом распределения

ξ	1	0
P	p	q

Выше было показано, что $M\xi = p$. Легко видеть, что $M\xi^2 = p$. Таким образом, получается, что $D\xi = p - p^2 = pq$.

Дисперсия характеризует степень рассеяния значений случайной величины относительно её математического ожидания. Если все значения случайной величины тесно сконцентрированы около её математического ожидания и большие отклонения от математического ожидания маловероятны, то такая случайная величина имеет малую дисперсию. Если значения случайной величины рассеяны и велика вероятность больших отклонений от математического ожидания, то такая случайная величина имеет большую дисперсию.

Свойства дисперсии.

1. Если k – число, то $D(k\xi) = k^2\, D\xi$.

Доказательство.

$$D(k\xi) = M(k\xi - M(k\xi))^2 = M(k\xi - k\,M\xi)^2 = M(k^2\,(\xi - M\xi)^2) = k^2 M(\xi - M\xi)^2 =$$

$$= k^2\,D\xi$$

2. Для попарно независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ справедливо равенство

$$D\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}D\xi_i$$

Это свойство оставим без доказательства. Рекомендуем читателю рассмотреть следующий пример.

Пусть ξ и η – независимые случайные величины с заданными законами распределения:

ξ	0	1
P	0,25	0,75

η	1	2
P	0,7	0,7

Показать, что $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.