Асимптотические формулы для формулы Бернулли.

В практических задачах часто приходится вычислять вероятности различных событий, связанных с числом успехов в n испытаниях при больших значениях n. В этих случаях вычисления по формуле по формуле Бернулли становятся затруднительными. Трудности возрастают, когда приходится суммировать вероятности $P_n(x)$. К суммированию сводится вычисление вероятностей событий вида $k \le x \le l$, как, например, в такой задаче:

Проводится 70 испытаний по схеме Бернулли с вероятностью появления события А в одном испытании, равной 0,4. Найти вероятность того, что событие А произойдет от 25 до 35 раз, то есть найти $P_n(25 \le x \le 35)$.

В отдельных случаях при больших n удается заменить формулу Бернулли приближенными формулами. Такие формулы, которые получаются при условии $n \to \infty$ называются асимптотическими.

Если n достаточно велико, а p - величина очень малая, для формулы Бернулли имеет место приближенная (асимптотическая) формула

$$P_n(x) = c_n^x p^x q^{n-x} \approx \frac{\lambda^x}{x!} e^{-1}$$

Здесь $\lambda = np$ (λ - греческая буква "лямбда"). Эта формула называется **формулой Пуассона**. По формуле Пуассона вычисляются вероятности числа появлений очень редких событий в массовых испытаниях.

Задача. Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. В течение часа любой абонент независимо от остальных может сделать вызов с вероятностью 0,05. Требуется найти вероятность того, что в течение часа было не более 7 вызовов.

Здесь $\lambda = np = 5$. Пусть x - число вызовов. Нас интересуют значения x, равные $0, 1, \ldots, 7$.

$$P(0) = \frac{5^0}{0!} e^{-5}; P(1) = \frac{5}{1!} e^{-1}; \ldots P(7) = \frac{5^7}{7!} e^{-7}$$

$$P(0 \le x \le 7) = e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{6} + \frac{5^4}{24} + \frac{5^5}{120} + \frac{5^6}{720} + \frac{5^7}{5040}\right) \approx 0{,}867$$

Если n достаточно велико, p не сильно отличается от 0,5, имеет место формула Муавра-Лапласа, иногда называемая **локальной формулой Лапласа**.

$$P_n(x) = c_n^x p^x q^{n-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\frac{-t^2}{2}}, \qquad \text{где } t = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$$

Из формулы видно, что одинаковые отклонения от величины np вправо и влево здесь имеют одинаковые вероятности. В формуле Бернулли это имеет место лишь при p=0.5.

Чтобы определить вероятность того, что в 50 испытаниях по схеме Бернулли при p=0.45 событие A наступило 30 раз, нужно воспользоваться таблицей значений функции $y = e^x$. Часто встречаются таблицы значений так называемой "локальной" функции Лапласа.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Если n достаточно велико, а p не сильно отличается от 0,5, имеет место интегральная формула Лапласа:

$$P_n(m_1 \le x \le m_2) = \sum_{x=m_1}^{m_2} c_n^x p^x q^{n-x} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

Здесь $\beta = \frac{x_2 - pn}{\sqrt{npq}}$; $\alpha = \frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\frac{-u^2}{2}} du$ — функция Лапласа, значения которой определяются из таблиц.

Для вычислений используются свойства функции Лапласа

1) $\Phi(0) = 0$
2) $\Phi(\infty) = 0{,}5$
3) $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.

При t=3,5 $\Phi(t) = 0{,}499767$, и так как $\Phi(t)$ - монотонно возрастающая функция, в практических расчетах при $t > 3{,}5$ можно принимать $\Phi(t) = 0{,}5$.

Задача. Игральную кость бросают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное 3, выпадает не менее 280 и не более 294 раз?

Здесь $n = 800; p = \frac{1}{3}; q = \frac{2}{3}$

$$P_{300}\left(280 \le x \le 294\right) = \Phi\left(\frac{294 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{280 - 800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) =$$

$$\Phi(2{,}05) - \Phi(1) = 0{,}479818 - 0{,}341343 \approx 0{,}14$$