Статистическое определение вероятности.

Рассмотрим случайный эксперимент, заключающийся в том, что подбрасывается игральная кость, сделанная из неоднородного материала. Ее центр тяжести не находится в геометрическом центре. В этом случае мы не можем считать исходы (выпадение единицы, двойки и т.д.) равновероятными. Из физики известно, что кость более часто будет падать на ту грань, которая ближе к центру тяжести. Как определить вероятность выпадения, например, трех очков? Единственное, что можно сделать, это подбросить эту кость n раз (где n-достаточно большое число, скажем n=1000 или n=5000), подсчитать число выпадений трех очков n_3 и считать вероятность исхода, заключающегося в выпадении трех очков, равной n_3/n - относительной частоте выпадения трех очков. Аналогичным образом можно определить вероятности остальных элементарных исходов — единицы, двойки, четверки и т.д. Теоретически такой образ действий можно оправдать, если ввести **статистическое определение вероятности**.

Вероятность $P(\omega_i)$ определяется как предел относительной частоты появления исхода ω_i в процессе неограниченного увеличения числа случайных экспериментов n, то есть

$$P_i = P(\omega_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n(\omega_i)}{n},$$

где $m_n(\omega_i)$ – число случайных экспериментов (из общего числа n произведенных случайных экспериментов), в которых зарегистрировано появление элементарного исхода ω_i.

Так как здесь не приводится никаких доказательств, мы можем только надеяться, что предел в последней формуле существует, обосновывая надежду жизненным опытом и интуицией.

Геометрическая вероятность

В одном специальном случае дадим определение вероятности события для случайного эксперимента с несчетным множеством исходов.

Если между множеством Ω элементарных исходов случайного эксперимента и множеством точек некоторой плоской фигуры Σ (сигма большая) можно установить взаимно-однозначное соответствие, а также можо установить взаимно-однозначное соответствие между множеством элементарных исходов, благоприятствующих событию A, и множеством точек плоской фигуры σ (сигма малая), являющейся частью фигуры Σ, то

$$P(A) = \frac{s}{S},$$

где s — площадь фигуры σ, S — площадь фигуры Σ.

Пример. Два человека обедают в столовой, которая открыта с 12 до 13 часов. Каждый из них приходит в произвольный момент времени и обедает в течение 10 минут. Какова вероятность их встречи?

Пусть x — время прихода первого в столовую, а y — время прихода второго $(12 \le x \le 13;\ \ 12 \le y \le 13)$.

Можно установить взаимно-однозначное соответствие между всеми парами чисел ($x;y$) (или множеством исходов) и множеством точек квадрата со стороной, равной 1, на координатной плоскости, где начало координат соответствует числу 12 по оси X и по оси Y, как изображено на рисунке 6. Здесь, например, точка A соответствует исходу, заключающемуся в том, что первый пришел в 12.30, а второй - в 13.00. В этом случае, очевидно, встреча не состоялась.

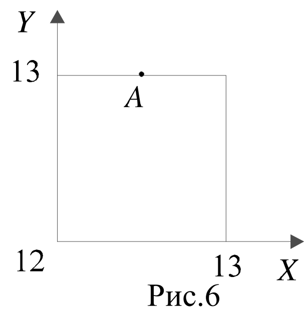

Рис.6

Если первый пришел не позже второго ($y \geq x$), то встреча произойдет при условии $0 \leq y - x \leq 1/6$ (10 мин.- это 1/6 часа).

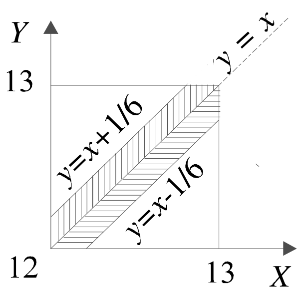

Рис. 7

Если второй пришел не позже первого ($x \geq y$), то встреча произойдет при условии $0 \leq x - y \leq 1/6$..

Между множеством исходов, благоприятствующих встрече, и множеством точек области σ, изображенной на рисунке 7 в заштрихованном виде, можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Искомая вероятность p равна отношению площади области σ к площади всего квадрата.. Площадь квадрата равна единице, а площадь области σ можно определить как разность единицы и суммарной площади двух треугольников, изображенных на рисунке 7. Отсюда следует:

$$p = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Непрерывное вероятностное пространство.

Как уже говорилось ранее, множество элементарных исходов может быть более, чем счетным (то есть несчетным). В этом случае нельзя считать любое подмножество множества Ω событием.

Чтобы ввести определение случайного события, рассмотрим систему (конечную или счетную) подмножеств $A_1, A_2, \ldots A_n$ пространства элементарных исходов Ω.
В случае выполнения трех условий:
1) Ω принадлежит этой системе;
2) из принадлежности A этой системе следует принадлежность $\overline{A}$ этой системе;
3) из принадлежности A_i и A_j этой системе следует принадлежность $A_i \cup A_j$ этой системе
такая система подмножеств называется **алгеброй.**

Пусть Ω — некоторое пространство элементарных исходов. Убедитесь в том, что две системы подмножеств:
1) Ω, ∅; 2) Ω, A, $\overline{A}$, ∅ (здесь A— подмножество Ω) являются алгебрами.

Пусть A_1 и A_2 принадлежат некоторой алгебре. Докажите, что $A_1 \setminus A_2$ и $A_1 \cap A_2$ принадлежат этой алгебре.

Подмножество А несчетного множества элементарных исходов Ω является событием, если оно принадлежит некоторой алгебре.

Сформулируем аксиому, называемую аксиомой А.Н. Колмогорова.

Каждому событию соответствует неотрицательное и не превосходящее единицы число *P(A),* называемое вероятностью события *A*, причем функция *P(A)* обладает следующими свойствами:

1) $P(\Omega)=1$
2) если события $A_1, A_2, ..., A_n$ несовместны, то
$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$

Если задано пространство элементарных исходов Ω, алгебра событий и определенная на ней функция P, удовлетворяющая условиям приведенной аксиомы, то говорят, что задано **вероятностное пространство**.

Это определение вероятностного пространства можно перенести на случай конечного пространства элементарных исходов Ω. Тогда в качестве алгебры можно взять систему всех подмножеств множества Ω.

Формулы сложения вероятностей.

Из пункта 2 приведенной аксиомы следует, что если A_1 и A_2 несовместные события, то

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Если A_1 и A_2 — совместные события, то $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$, причем очевидно, что $A_1 \setminus A_2$ и A_2 — несовместные события. Отсюда следует:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2) \qquad (*)$$

Далее очевидно: $A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$, причем $A_1 \setminus A_2$ и $A_1 \cap A_2$ - несовместные события, откуда следует: $P(A_1) = P(A_1 \setminus A_2) + P(A_1 \cap A_2)$ Найдем из этой формулы выражение для $P(A_1 \setminus A_2)$ и подставим его в правую часть формулы (*). В результате получим формулу сложения вероятностей:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Из последней формулы легко получить формулу сложения вероятностей для несовместных событий, положив $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Пример. Найти вероятность вытащить туза или червовую масть при случайном отборе одной карты из колоды в 32 листа.

$$P(\text{ ТУЗ }) = 4/32 = 1/8; \; P(\text{ ЧЕРВОВАЯ МАСТЬ }) = 8/32 = 1/4;$$

$$P(\text{ ТУЗ ЧЕРВЕЙ }) = 1/32;$$

$$P((\text{ ТУЗ }) \cup (\text{ЧЕРВОВАЯ МАСТЬ })) = 1/8 + 1/4 - 1/32 = 11/32$$

Того же результата можно было достичь с помощью классического определения вероятности, пересчитав число благоприятных исходов.

Условные вероятности.

Рассмотрим задачу. Студент перед экзаменом выучил из 30 билетов билеты с номерами с 1 по 5 и с 26 по 30. Известно, что студент на экзамене вытащил билет с номером, не превышающим 20. Какова вероятность, что студент вытащил выученный билет?

Определим пространство элементарных исходов: Ω=(1,2,3,...,28,29,30). Пусть событие A заключается в том, что студент вытащил выученный билет: $A = (1,...,5,25,...,30,)$, а событие B — в том, что студент вытащил билет из первых двадцати: $B = (1,2,3,...,20)$

Событие $A \cap B$ состоит из пяти исходов: (1,2,3,4,5), и его вероятность равна 5/30. Это число можно представить как произведение дробей 5/20 и 20/30. Число 20/30 - это вероятность события B. Число 5/20 можно рассматривать как вероятность события A при условии, что событие B произошло (обозначим её $P(A/B)$). Таким образом решение задачи определяется формулой

$$P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B)$$

Эта формула называется формулой умножения вероятностей , а вероятность $P(A/B)$ — условной вероятностью события A.

Пример..Из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шаров, наудачу один за другим извлекают (без возвращения) два шара. Какова вероятность того, что первый шар будет белым, а второй черным?

Пусть X — событие, состоящее в извлечении первым белого шара, а Y — событие, состоящее в извлечении вторым черного шара. Тогда $X \cap Y$ - событие, заключающееся в том, что первый шар будет белым, а второй — черным. $P(Y/X) = 3/9 = 1/3$ — условная вероятность извлечения вторым черного шара, если первым был извлечен белый. Учитывая, что $P(X) = 7/10$, по формуле умножения вероятностей получаем: $P(X \cap Y) = 7/30$

Событие А называется независимым от события В (иначе: события А и В называются независимыми), если $P(A/B)=P(A)$. За определение независимых событий можно принять следствие последней формулы и формулы умножения

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Докажите самостоятельно, что если A и B — независимые события, то $\overline{A}$ и $\overline{B}$ тоже являются независимыми события.

Пример.Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, но с одним дополнительным условием: вытащив первый шар, запоминаем его цвет и возвращаем шар в урну, после чего все шары перемешиваем. В данном случае результат второго извлечения никак не зависит от того, какой шар - черный или белый появился при первом извлечении. Вероятность появления первым белого шара (событие A) равна 7/10. Вероятность события B - появления вторым черного шара - равна 3/10. Теперь формула умножения вероятностей дает: $P(A \cap B) = 21/100$.

Извлечение шаров способом, описанным в этом примере, называется **выборкой с возвращением** или **возвратной выборкой**.

Следует отметить, что если в двух последних примерах положить изначальные количества белых и черных шаров равными соответственно 7000 и 3000, то результаты расчетов тех же вероятностей будут отличаться пренебрежимо мало для возвратной и безвозвратной выборок.