Задачи статистической проверки гипотез.

Статистическая проверка гипотез является вторым после статистического оценивания параметров распределения и в то же время важнейшим разделом математической статистики.

Методы математической статистики позволяют проверить предположения о законе распределения некоторой случайной величины (генеральной совокупности), о значениях параметров этого закона (например $M\xi$, $D\xi$), о наличии корреляционной зависимости между случайными величинами, определенными на множестве объектов одной и той же генеральной совокупности.

Пусть по некоторым данным имеются основания выдвинуть предположения о законе распределения или о параметре закона распределения случайной величины (или генеральной совокупности, на множестве объектов которой определена эта случайная величина). Задача заключается в том, чтобы подтвердить или опровергнуть это предположение, используя выборочные (экспериментальные) данные.

Гипотезы о значениях параметров распределения или о сравнительной величине параметров двух распределений называются **параметрическими гипотезами**.

Гипотезы о виде распределения называются **непараметрическими гипотезами**.

Проверить статистическую гипотезу – это значит проверить, согласуются ли данные, полученные из выборки с этой гипотезой. Проверка осуществляется с помощью **статистического критерия**. **Статистический критерий – это случайная величина, закон распределения которой (вместе со значениями параметров) известен в случае, если принятая гипотеза справедлива**. Этот критерий называют еще **критерием согласия** (имеется в виду согласие принятой гипотезы с результатами, полученными из выборки).

Гипотезу, выдвинутую для проверки ее согласия с выборочными данными, называют **нулевой гипотезой** и обозначают H_0. Вместе с гипотезой H_0 выдвигается **альтернативная** или **конкурирующая** гипотеза, которая обозначается H_1. Например:

1) H_0: $M\xi = 0$ 2) H_0: $M\xi = 0$ 3) H_0: $M\xi = 0$

H_1: $M\xi \neq 0$ H_1: $M\xi > 0$ H_1: $M\xi = 2$

Пусть случайная величина K – статистический критерий проверки некоторой гипотезы H_0. При справедливости гипотезы H_0 закон распределения случайной величины K характеризуется некоторой известной нам плотностью распределения $p_K(x)$.

Выберем некоторую малую вероятность α, равную 0,05 , 0,01 или еще меньшую. Определим **критическое значение критерия** $K_{кр}$ как решение одного из трех уравнений, в зависимости от вида нулевой и конкурирующей гипотез:

$$P(K > K_{кр}) = \alpha \qquad (1)$$

$$P(K < K_{кр}) = \alpha \qquad (2)$$

$$P((K < K_{кр1}) \cap (K > K_{кр2})) = \alpha \qquad (3)$$

Возможны и другие уравнения, но они встречаются значительно реже, чем приведенные.

Решение уравнения (1) (то же самое для уравнений (2) и (3)) заключается в следующем: по вероятности α, зная функцию $p_K(x)$, заданную как правило таблицей, нужно определить $K_{кр}$.

Что означает условие (1)?

Если гипотеза H_0 справедлива, то вероятность того, что критерий K превзойдет некоторое значение $K_{кр}$ очень мала – 0,05 , 0,01 или еще меньше, в зависимости от нашего выбора. Если $K_в$ – значение критерия K, рассчитанное по выборочным данным, превзошло значение $K_{кр}$, это означает, что выборочные данные не дают основания для принятия нулевой гипотезы H_0 (например, если α=0,01 , то можно сказать, что произошло событие, которое при справедливости гипотезы H_0 встречается в среднем не чаще, чем в одной из ста выборок). В этом случае говорят, что **гипотеза H_0 не согласуется с выборочными данными и должна быть отвергнута**. Если $K_в$ не превосходит $K_{кр}$, то говорят, что **выборочные данные не противоречат гипотезе H_0**, и нет оснований отвергать эту гипотезу.

Для уравнения (1) область $K > K_{кр}$ называется **критической** областью. **Если значение $K_в$ попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается**.

Для уравнения (1) область $K < K_{кр}$ называется **областью принятия гипотезы**. **Если значение $K_в$ попадает в область принятия гипотезы, то гипотеза H_0 принимается**.

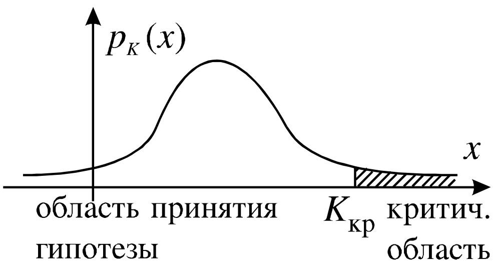

Рис. 1.

Рисунок 1. иллюстрирует решение уравнения (1). Здесь $p_K(x)$ – известная плотность распределения случайной величины K при условии справедливости гипотезы H_0.

Пусть выбрано некоторое малое значение вероятности α, по нему определено значение $K_{кр}$ и по выборочным данным определено значение $K_в$, которое попало в критическую область. В этом случае гипотеза H_0 отвергается, но она может оказаться справедливой, просто случайно произошло событие, которое имеет очень малую вероятность α. В этом смысле α есть вероятность отвержения правильной гипотезы H_0.

Отвержение правильной гипотезы называется **ошибкой первого рода**. Вероятность α называется уровнем значимости. Таким образом **уровень значимости – это вероятность совершения ошибки первого рода**.

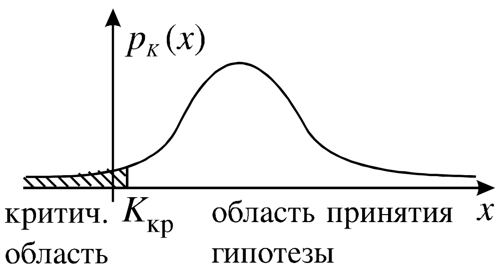

Рис. 2.

Критическая область, полученная для уравнения (1) и приведенная на рисунке 1., называется **правосторонней**.

Уравнение (2) определяет **левосторонюю критическую область**.

Ее изображение приводится на рисунке 2.

Отметим, что каждая из заштрихованных фигур на рисунках 1. и 2. имеет площадь, равную α.

Уравнение (3) определяет **двустороню критическую область**. Такая область изображена на рисунке 3. Здесь критическая область состоит из двух частей. В случае двусторонней критической области границы ее частей $K_{кр1}$ и $K_{кр2}$ определяются таким образом, чтобы выполнялось условие:

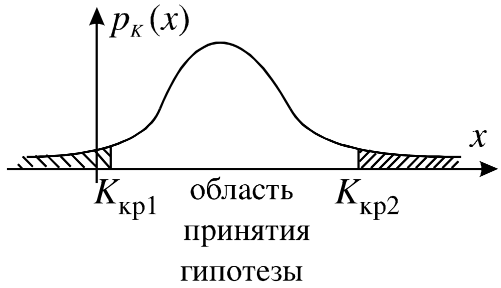

Рис. 3.

$$P(K \le K_{кр}) = P(K \ge K_{кр}) = \alpha / 2.$$

На рисунке 3. площадь каждой из заштрихованных фигур равна $\alpha / 2$.

Вид критической области зависит от того, какая гипотеза выдвинута в качестве конкурирующей.

Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность отвергнуть проверяемую гипотезу H_0, когда она верна, то есть совершить ошибку первого рода. Но с уменьшением уровня значимости расширяется область принятия гипотезы H_0 и увеличивается вероятность принятия проверяемой гипотезы, когда она неверна, то есть когда предпочтение должно быть отдано конкурирующей гипотезе.

Пусть при справедливости гипотезы H_0 статистический критерий K имеет плотность распределения $p_0(x)$, а при справедливости конкурирующей гипотезы H_1 – плотность распределения $p_1(x)$. Графики этих функций приведены на рисунке 4. При некотором уровне значимости находится критическое значение $K_{кр}$ и правостороняя критическая область. Если значение $K_в$, определенное по выборочным данным, оказывается меньше, чем $K_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. Предположим, что справедлива на самом деле конкурирующая гипотеза H_1. Тогда вероятность попадания критерия в область принятия гипотезы H_0 есть некоторое число β, равное площади фигуры, образованной графиком функции $p_1(x)$ и полубесконечной частью горизонтальной координатной

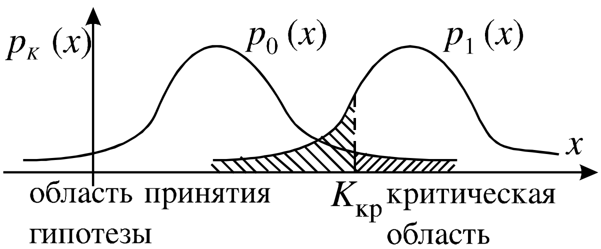

Рис. 4.

оси, лежащей слева от точки $K_{кр}$. Очевидно, что β – это вероятность того, что будет принята неверная гипотеза H_0.

Принятие неверной гипотезы называется ошибкой второго рода. В рассмотренном случае число β – это вероятность ошибки второго рода. **Число** $1 - \beta$, **равное вероятности того, что не совершается ошибка второго рода, называется мощностью критерия**. На рисунке 4 мощность критерия равна площади фигуры, образованной графиком функции $p_1(x)$.и полубесконечной частью горизонтальной координатной оси, лежащей справа от точки $K_{кр}$.

Выбор статистического критерия и вида критической области осуществляется таким образом, чтобы мощность критерия была максимальной.