Распределение χ^2.

Пусть имеется n независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, распределенных по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице. Тогда случайная величина $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ распределена по закону, который называется “распределение χ^2” или “распределение Пирсона”. Очевидно, что она может принимать лишь неотрицательные значения. Число n называется **числом степеней свободы**.

При $n > 1$ график плотности распределения случайной величины χ^2 представляет собой кривую, изображенную на рисунке 1.

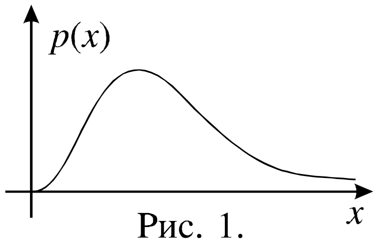

Рис. 1.

Для того, чтобы определить вероятность попадания случайной величины χ^2 в какой-либо промежуток из множества положительных чисел, пользуются таблицей распределения χ^2. Обычно такая таблица позволяет

q / n	0,99	0,975	0,95	...	0,1	0,05	0,01
1	$0{,}0^315$	$0{,}0^398$	$0{,}0^239$	...	2,71	3,84	6,63
...	...	...	...	...	...	...	...
10	2,56	3,25	3,94	...	16,0	18,3	23,2
...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 1.

по вероятности q и по числу степеней свободы n определить так называемый **квантиль** χ_q^2, если q и χ_q^2 связаны соотношением

$$P(\chi^2 > \chi_q^2) = q.$$

Эта формула означает: вероятность того, что случайная величина χ^2 примет значение, большее чем определенное значение χ_q^2, равна q.

Таблица 1 представляет собой фрагмент таблицы распределения χ^2. Из него видно, что случайная величина χ^2 с 10-ю степенями свободы с вероятностью $q = 0,95$ принимает значение, большее 3,94, а та же величина с одной степенью свободы с вероятностью $q = 0,975$ превышает 0,00098.

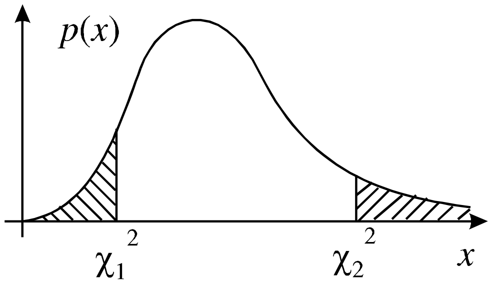

Рис. 2

Задача. Найти интервал (χ_1^2, χ_2^2), в который случайная величина χ^2 с 10-ю степенями свободы попадает с вероятностью, равной 0,9.

Решение. График плотности распределения χ^2 с 10-ю степенями свободы схематично изображен на рисунке 2. Будем считать, что площади заштрихованных областей (правая область не ограничена справа) равны между собой. Примем условия:

$$P(\chi^2 < \chi_1^2) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = (1 - 0,9)/2 = 0,05, \qquad (1)$$

тогда $P(\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2) = 0,9$.

Равенства (1) сразу позволяют по таблице определить: $\chi_2^2 = 18,3$. Для определения левой границы интересующего нас интервала придется воспользоваться очевидным равенством $P(\chi^2 > \chi_1^2) = 0,95$. Из таблицы 1. определяем: $\chi_1^2 = 3,94$, и теперь можно сформулировать ответ задачи: значение случайной величины χ^2 с вероятностью 0,9 принадлежит интервалу (3,94; 18,3).

Распределение Стьюдента.

Многие задачи статистики приводят к случайной величине вида

$$t = \frac{\xi\sqrt{k}}{\sqrt{\eta}},$$

где ξ и η – независимые случайные величины, причем ξ – нормально распределенная случайная величина с параметрами $M\xi = 0$ и $D\xi = 1$, а η распределена по закону χ^2 с k степенями свободы.

Закон распределения случайной величины t называется **законом распределения Стьюдента** с k степенями свободы.

График плотности распределения для закона Стьюдента схематически изображен на рисунке 3. Кривая плотности распределения схожа с аналогичной кривой для нормального распределения.

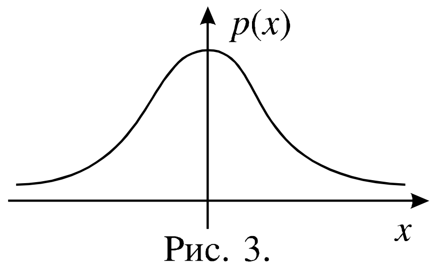

Рис. 3.

Таблицы распределения Стьюдента позволяют при данном числе степеней свободы k по вероятности q определить значение t_q, для которого выполняется соотношение $P(|t| > t_q) = q$. Фрагмент такой таблицы представляет собой таблица 2.

q / k	0,1	0,05	...	0,01	0,005	...
1	6,314	12,71	...	63,57	318	...
...	...	...	...	...	...	...
12	1,782	2,179	...	3,055	3,428	...
...	...	...	...	...	...	...

Таблица 2

Задача. Найти симметричный интервал, в который случайная величина, распределенная по закону Стьюдента с 12-ю степенями свободы, попадает вероятностью 0,9.

Решение. Очевидны соотношения:

$$P(-x < t < x) = P(|t| < x) = 1 - P(|t| \geq x) = 0{,}9.$$

Из последнего равенства следует:

$$P(|t| \geq x) = 0{,}1 \ , \ (n = 12).$$

Определяем из таблицы: $x = 1{,}782$. Нестрогое неравенство в скобках в левой части последней формулы нас не должно смущать, так как мы имеем дело с непрерывной случайной величиной, и вероятность того, что она примет конкретное значение, равна нулю.

Задача. Найти значение x из условия $P(t > x) = 0{,}995$, где t – случайная величина, распределенная по закону Стьюдента с 12-ю степенями свободы.

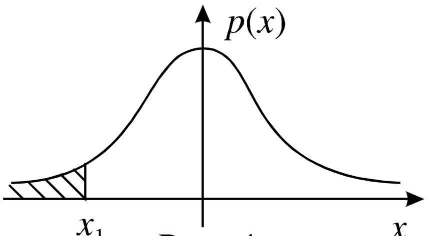

Рис. 4.

Решение. На рисунке 4 изображен график плотности распределения Стьюдента с 12-ю степенями свободы. Вероятность того, что случайная величина примет значение из области справа от точки x_1 равна 0,995 , следовательно в область левее этой точки случайная величина попадает с вероятностью 0,005. Чтобы найти x_1, рассмотрим две симметричные области, изображенные на рисунке 5. Допустим, что в каждой из этих областей значение случайной величины оказывается с вероятностью 0,005. Тогда получаем: $x_1 = -x$, $x_2 = x$, причем x определяется из условия $P(|t| > x) = 0{,}01$. Из таблицы 2 находим: $x = 3{,}055$. Теперь можно выписать ответ задачи:

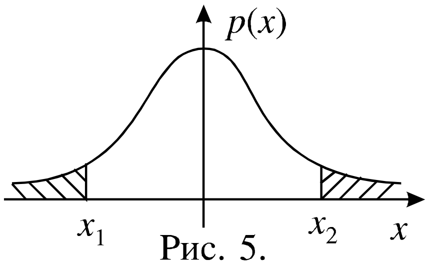

Рис. 5.

$$P(t > -3{,}055) = 0{,}995.$$

Распределение Фишера.

Важные приложения имеет в статистике случайная величина

$$F = \frac{\dfrac{\xi}{k_1}}{\dfrac{\eta}{k_2}} = \frac{k_2\xi}{k_1\eta},$$

где ξ – случайная величина, распределенная по закону χ^2 с k_1 степенями свободы, а η – случайная величина, распределенная по закону χ^2 с k_2 степенями свободы.

Случайная величина F распределена по закону, называемому законом распределения Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы. При заданных числах k_1 и k_2 и по вероятности q по таблице определяется значение F_q такое, что

$$P(F > F_q) = q.$$

Обычно таблицы составляются для значений q, равных 0,05 или 0,01, а иногда для обоих этих значений. Фрагмент такой таблицы представляет собой таблица 3.

k_1 / k_2	1	...	10	...	20	...
1	161,4 647,8	...	241,9 6056	...	248 6209	...
...	...	...	...	...	...	...
10	4,96 10,04	...	2,97 4,85	...	2,77 4,41	...
...	...	...	...	...	...	...

Таблица 3.

В этой таблице в верхней части каждой клетки дается значение F_q при $q = 0{,}05$, а в нижней части — при $q = 0{,}01$.