Комбинаторные формулы

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Обозначим его U_n. **Перестановкой** из n элементов называется заданный порядок во множестве U_n.

Примеры перестановок:

1)распределение n различных должностей среди n человек;

2)расположение n различных предметов в одном ряду.

Сколько различных перестановок можно образовать во множестве U_n? Число перестановок обозначается P_n (читается P из n).

Чтобы вывести формулу числа перестановок, представим себе n ячеек, пронумерованных числами 1,2,...n. Все перестановки будем образовывать, располагая элементы U_n в этих ячейках. В первую ячейку можно занести любой из n элементов (иначе: первую ячейку можно заполнить n различными способами). Заполнив первую ячейку, можно n-1 способом заполнить вторую ячейку (иначе: при каждом способе заполнения первой ячейки находится n-1 способов заполнения второй ячейки). Таким образом существует $n(n-1)$ способов заполнения двух первых ячеек. При заполнении первых двух ячеек можно найти n-2 способов заполнения третьей ячейки, откуда получается, что три ячейки можно заполнить $n(n-1)(n-2)$ способами. Продолжая этот процесс, получим, что число способов заполнения n ячеек равно $n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$. Отсюда

$$P_n = n(n - 1)(n - 2)...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Число $n(n - 1)(n - 2)...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n, называется "n-факториал" и обозначается $n!$. Отсюда $P_n = n!$

Пример. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

По определению считается: $1!=1$; $0!=1$.

Размещениями из n элементов по k элементов будем называть упорядоченные подмножества, состоящие из k элементов, множества U_n - (множества, состоящего из n элементов). Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (читается "A из n по k").

Примеры задач, приводящих к необходимости подсчета

1) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек 5 кандидатов и назначить их на 5 различных должностей?

2) Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 и расставить их в ряд на полке?

В задачах о размещениях полагается $k<n$. В случае, если $k=n$, то легко получить $A_n^k = P_n = n!$

Для подсчета A_n^k используем тот же метод, что использовался для подсчета P_n ,только здесь возьмем лишь k ячеек. Первую ячейку можно заполнить n способами, вторую, при заполненной первой, можно заполнить n-1 способами. Можно продолжать этот процесс до заполнения последней k-й ячейки. Эту ячейку при заполненных первых k-1 ячейках можно заполнить $n-(k-1)$ способами (или $n-k+1$). Таким образом все k ячеек заполняются числом способов, равным

$$n(n - 1)(n - 2)\ldots(n - k + 2)(n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Отсюда получаем: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Пример. Сколько существует различных вариантов выбора 4-х кандидатур из 9-ти специалистов для поездки в 4 различных страны?

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$

Сочетаниями из *n* элементов по *k* элементов называются подмножества, состоящие из *k* элементов множества U_n (множества, состоящего из *n* элементов).

Одно сочетание от другого отличается только составом выбранных элементов (но не порядком их расположения, как у размещений).

Число сочетаний из *n* элементов по *k* элементов обозначается C_n^k (читается "*C* из *n* по *k*").

Примеры задач, приводящих к необходимости подсчета числа сочетаний:

1) Сколькими способами можно из 15 человек выбрать 6 кандидатов для назначения на работу в одинаковых должностях?

2) Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 книг?

Выведем формулу для подсчета числа сочетаний. Пусть имеется множество U_n и нужно образовать упорядоченное подмножество множества U_n, содержащее *k* элементов (то есть образовать размещение). Делаем это так:

1) выделим какие-либо *k* элементов из *n* элементов множества U_n Это, согласно сказанному выше, можно сделать C_n^k способами;

2) упорядочим выделенные *k* элементов, что можно сделать $P_k = k!$ способами. Всего можно получить $C_n^k \cdot P_k$ вариантов (упорядоченных подмножеств), откуда следует: $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$,то есть

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Пример: 6 человек из 15 можно выбрать числом способов, равным

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{9!\,6!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 5005$$

Задачи на подсчет числа подмножеств конечного множества называются комбинаторными. Рассмотрим некоторые комбинаторные задачи.

1.Из семи заводов организация должна выбрать три для размещения трех различных заказов. Сколькими способами можно разместить заказы?

Так как все заводы различны, и из условия ясно, что каждый завод может либо получить один заказ, либо не получить ни одного, здесь нужно считать число размещений

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

2.Если из текста задачи 1 убрать условие различия трех заказов, сохранив все остальные условия, получим другую задачу. Теперь способ размещения заказов определяется только выбором тройки заводов, так как все эти заводы получат одинаковые заказы, и число вариантов определяется как число сочетаний.

$$C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

3.Имеются 7 заводов. Сколькими способами организация может разместить на них три различных производственных заказа? (Заказ нельзя дробить, то есть распределять его на несколько заводов).

В отличие от условия первой задачи, здесь организация может отдать все три заказа первому заводу или, например, отдать два заказа второму заводу, а один - седьмому.

Задача решается так. Первый заказ может быть размещен семью различными способами (на первом заводе, на втором и т.д.). Разместив первый заказ, имеем семь вариантов размещения второго (иначе, каждый способ размещения первого заказа может сопровождаться семью способами размещения второго). Таким образом, существует $7 \cdot 7 = 49$ способов размещения первых двух заказов. Разместив их каким-либо образом, можем найти 7 вариантов размещения третьего (иначе, каждый способ размещения первых двух заказов может сопровождаться семью различными способами распределения третьего заказа). Следовательно, существуют $49 \cdot 7 = 7^3$ способов размещения трех заказов. (Если бы заказов было n, то получилось бы 7^n способов размещения).

4.Как решать задачу 3, если в ее тексте вместо слов "различных производственных заказа" поставить "одинаковых производственных заказа"?

5.Добавим к условию задачи 1 одну фразу: организация также должна распределить три различных заказа на изготовление деревянных перекрытий среди 4-х лесопилок. Сколькими способами могут быть распределены все заказы?

Каждый из $\boldsymbol{A}_7^3$ способов распределения заказов на заводах может сопровождаться $\boldsymbol{A}_4^3$ способами размещения заказов на лесопилках. Общее число возможных способов размещения всех заказов будет равно

$$\grave{\boldsymbol{A}}_7^3 \cdot \grave{\boldsymbol{A}}_4^3 = \frac{7!}{4!} \cdot \frac{4!}{1!} = 7!$$

Случайный эксперимент, элементарные исходы, события.

Случайным (стохастическим) экспериментом или испытанием называется осуществление какого-либо комплекса условий, который можно практически или мысленно воспроизвести сколь угодно большое число раз.

Примеры случайного эксперимента: подбрасывание монеты, извлечение одной карты из перетасованной колоды, подсчет числа автомобилей в очереди на бензоколонке в данный момент.

Явления, происходящие при реализации этого комплекса условий, то есть в результате случайного эксперимента, называются **элементарными исходами**. Считается, что при проведении случайного эксперимента реализуется только один из возможных элементарных исходов.

Если монету подбросить один раз, то элементарными исходами можно считать выпадение герба (Г) или цифры (Ц).

Если случайным экспериментом считать троекратное подбрасывание монеты, то элементарными исходами можно считать следующие:

ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ.

Множество всех элементарных исходов случайного эксперимента называется **пространством элементарных исходов** . Будем обозначать пространство элементарных исходов буквой Ω (омега большая) *i*-й элементарный исход будем обозначать ω_i (ω-омега малая).

Если пространство элементарных исходов содержит *n* элементарных исходов, то

$$\Omega=(\omega_1,\ \omega_2,...,\ \omega_n).$$

Для троекратного подбрасывания монеты,

$$\Omega=(\text{ГГГ, ГГЦ,...ЦЦЦ}).$$

Если случайный эксперимент - подбрасывание игральной кости, то Ω=(1,2,3,4,5,6).

Если Ω **конечно** или **счетно**, то **случайным событием** или просто **событием** называется любое подмножество Ω**.**

Множество называется счетным, если между ним и множеством *N* натуральных чисел можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Пример счетного множества: множество возможных значений времени прилета инопланетян на Землю, если время отсчитывать с настоящего момента и исчислять с точностью до секунды.

Примеры несчетных множеств: множество точек на заданном отрезке, множество чисел *x*, удовлетворяющих неравенству $1< x \le 2$.

В случае несчетного множества Ω будем называть событиями только подмножества, удовлетворяющие некоторому условию (об этом будет сказано позже).

Приведем примеры событий. Пусть бросается игральная кость, и элементарным исходом считается выпавшее число очков: Ω=(1,2,3,4,5,6). *A* — событие, заключающееся в том, что выпало четное число очков: *A*=(2,4,6); *B* — событие, заключающееся в том, что выпало число очков, не меньшее 3-х: *B*=(3,4,5,6).

Говорят, что те исходы, из которых состоит событие *A*, благоприятствуют событию *A*.

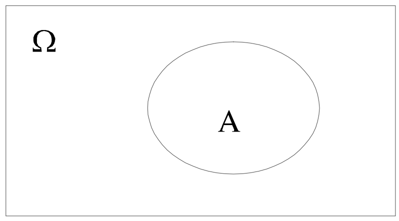

Рис.1

События удобно изображать в виде рисунка, который называется **диаграммой Венна.** На рисунке 1 пространство элементарных исходов Ω изображено в виде прямоугольника, а множество элементарных исходов, благоприятствующих событию *A*, заключено в эллипс. Сами исходы на диаграмме Венна не изображаются, а информация о соотношении между их множествами содержится в расположении границ соответствующих областей.

Суммой (объединением) двух событий *A* **и** *B* (обозначается $A \cup B$) называется событие, состоящее из всех элементарных исходов, принадлежащих по крайней мере одному из событий *A* или *B*. Событие $A \cup B$ происходит, если происходит по крайней мере одно из событий *A* или *B*.

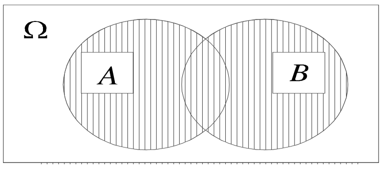

Рис.2

Приведем пример объединения событий. Пусть два стрелка стреляют в мишень одновременно, и событие *A* состоит в том, что в мишень попадает 1-й стрелок, а событие ***B*** - в том, что в мишень попадает 2-й. Событие $A \cup B$ означает, что мишень поражена, или, иначе, что в мишень попал хотя бы один из стрелков.

Произведением (пересечением) $A \cap B$ событий A и B называется событие, состоящее из всех тех элементарных исходов, которые принадлежат и A и B. На рисунке 3 пересечение событий A и B изображено в виде заштрихованной области. В условиях приведенного выше примера событие $A \cap B$ заключается в том, что в мишень попали оба стрелка.

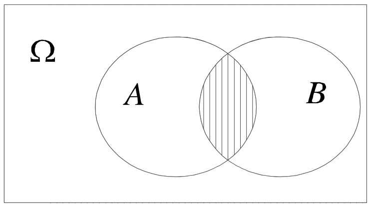

Рис.3

Разностью $A \setminus B$ или A-B событий A и B называется событие, состоящее из всех исходов события A, не благоприятствующих событию B. Диаграмма Венна разности событий A и B изображена на рисунке 4.

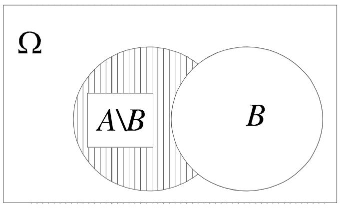

Рис.4

В условиях рассмотренного выше примера событие $A \setminus B$ заключается в том, что первый стрелок попал в мишень, а второй промахнулся.

Событие Ω называется **достоверным** (оно обязательно происходит в результате случайного эксперимента).

Пустое множество ∅ называется **невозможным** событием. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется **противоположным** событию A или **дополнением** события A.

События A и B называются **несовместными**, если нет исходов, принадлежащих и A и B, то есть $A \cap B = \varnothing$. На рисунке 5 изображены несовместные события A и B**.**

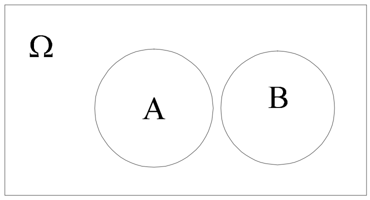

Рис.5

Непосредственно из введенных определений следуют равенства: $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **;** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Два последних равенства называются формулами Де'Моргана.

Вероятностное пространство Случай конечного или счетного числа исходов.

Для построения полной и законченной теории случайного эксперимента или теории вероятностей, помимо введенных исходных понятий случайного эксперимента, элементарного исхода, пространства элементарных исходов, события, введем аксиому (пока для случая конечного или счетного пространства элементарных исходов).

Каждому элементарному исходу ω_i пространства Ω соответствует некоторая неотрицательная числовая характеристика P_i шансов его появления, называемая вероятностью исхода ω_i , причем

$$\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \ldots + \boldsymbol{P}_n + \ldots = \sum_{i:\, \omega_i \in \Omega} \boldsymbol{P}_i = 1$$

(здесь суммирование ведется по всем i, для которых выполняется условие: $\omega_i \in \Omega$).

Отсюда следует, что $0 \le P_i \le 1$для всех i.

Вероятность любого события A определяется как сумма вероятностей всех элементарных исходов, благоприятствующих событию A. Обозначим ее $P(A)$.

$$P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} P(\omega_i) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} P_i \qquad (*)$$

Отсюда следует, что

1) $0 \le P(A) \le 1$;

2) $P(\Omega)=1$;

3) $P(\varnothing)=0$.

Будем говорить, что задано **вероятностное пространство**, если задано пространство элементарных исходов **Ω** и определено соответствие

$$\omega_i \to P(\omega_i) = P_i.$$

Возникает вопрос: как определить из конкретных условий решаемой задачи вероятность $P(\omega_i)$ отдельных элементарных исходов?

Классическое определение вероятности.

Вычислять вероятности $P(\omega_i)$ можно, используя априорный подход, который заключается в анализе специфических условий данного эксперимента (до проведения самого эксперимента).

Возможна ситуация, когда пространство элементарных исходов состоит из конечного числа *N* элементарных исходов, причем случайный эксперимент таков, что вероятности осуществления каждого из этих *N* элементарных исходов представляются равными. Примеры таких случайных экспериментов: подбрасывание симметричной монеты, бросание правильной игральной кости, случайное извлечение игральной карты из перетасованной колоды. В силу введенной аксиомы вероятности каждого элементарного исхода в этом случае равны $\frac{1}{N}$. Из этого следует, что если событие A содержит N_A элементарных исходов, то в соответствии с определением (*)

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

В данном классе ситуаций вероятность события определяется как отношение числа благоприятных исходов к общему числу всех возможных исходов.

Пример. Из набора, содержащего 10 одинаковых на вид электроламп, среди которых 4 бракованных, случайным образом выбирается 5 ламп. Какова вероятность, что среди выбранных ламп будут 2 бракованные?

Прежде всего отметим, что выбор любой пятерки ламп имеет одну и ту же вероятность. Всего существует C_{10}^5 способов составить такую пятерку, то есть случайный эксперимент в данном случае имеет C_{10}^5 равновероятных исходов.

Сколько из этих исходов удовлетворяют условию "в пятерке две бракованные лампы", то есть сколько исходов принадлежат интересующему нас событию?

Каждую интересующую нас пятерку можно составить так: выбрать две бракованные лампы, что можно сделать числом способов, равным C_4^2. Каждая пара бракованных ламп может встретиться столько раз, сколькими способами ее можно дополнить тремя не бракованными лампами, то есть $\tilde{N}_6^3$ раз. Получается, что число пятерок, содержащих две бракованные лампы, равно $C_4^2 \cdot \tilde{N}_6^3$.

Отсюда, обозначив искомую вероятность через P, получаем:

$$P = \frac{C_4^2 \cdot C_6^3}{C_{10}^5} = \frac{10}{21}$$