

## Глава 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

### §1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных, и в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если производные, входящие в уравнение, берутся только по одной переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**. Если в уравнении встречаются производные по нескольким переменным, то уравнение называется **уравнением в частных производных**. Мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения.

Начнем с дифференциальных уравнений **первого порядка**. Это уравнения, в которые входит лишь первая производная неизвестной функции. Это уравнение может быть записано в виде

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Здесь  $x$  - независимая переменная,  $y$  - её неизвестная функция,  $y' = \frac{dy}{dx}$  - производная функции  $y$ ,  $F$  - заданная функция трех переменных. Функция  $F$  может быть задана не для всех значений её аргументов, поэтому можно говорить об области  $B$  определения функции  $F$  координатного пространства, то есть о множестве точек координатного пространства трех переменных  $x, y, y'$ .

Приведем примеры дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y' - x^4 = 0; \quad x \sin y' - \ln y = 0; \quad x \cos y + (y' - y^2) \sin x = 0.$$

**Решением уравнения (1)** называется такая функция  $y = \varphi(x)$ , определенная на некотором промежутке  $(x_1, x_2)$ , что при подстановке её вместо  $y$  в уравнение (1) получается верное равенство на всем промежутке  $(x_1, x_2)$ . Очевидно, что подстановка  $y = \varphi(x)$  возможна только тогда, когда функция  $\varphi(x)$  на промежутке  $(x_1, x_2)$  имеет первую производную. Необходимо также, чтобы при любом значении переменной  $x$  из промежутка  $(x_1, x_2)$  точка с координатами  $x, y, y'$  принадлежала множеству  $B$ , на котором определена функция  $F$ . Совокупность всех решений дифференциального уравнения называется его **общим решением**.

В некоторых случаях уравнение (1) определяет переменную  $y'$  как функцию независимых переменных  $x$  и  $y$ :

$$y' = f(x, y). \quad (2)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) равносильно дифференциальному уравнению (1) и называется **разрешенным относительно производной**.

Рассмотрим свойства решений уравнения (2). Введем в рассмотрение координатную плоскость  $XU$  переменных  $x$  и  $y$ . Мы будем рассматривать лишь такие уравнения, у которых **область определения правой части есть некоторая открытая область  $G$  в плоскости  $XU$**  (область называется открытой, если каждая точка входит в неё вместе с некоторой своей окрестностью). Пусть функция  $y = \varphi(x)$  – решение уравнения (2). Тогда график этой функции называется **интегральной линией** или **интегральной кривой**. Эта кривая лежит в области  $G$ . Если точка  $(x_0, y_0)$  принадлежит области  $G$ , то интегральная кривая проходит через эту точку. Интегральная кривая в рассматриваемой точке имеет касательную, угловой коэффициент которой равен

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0))$$

Таким образом, в каждой точке области  $G$  можно установить положение касательной к графику решения уравнения (2), проходящему через эту точку.

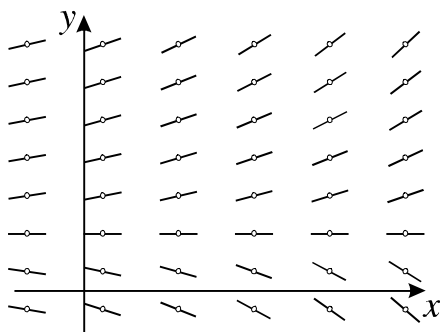


Рис. 1

Можно себе представить, что в каждой точке области  $G$  построен короткий отрезок касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Тогда получится чертеж, который называется **полем направлений**, задаваемым уравнением (2). Пример приведен на рисунке 1.

Таким образом, каждое дифференциальное уравнение вида (2) задает на плоскости  $XU$  в области  $G$  поле направлений. Интегральные линии этого уравнения касаются направления, задаваемого полем в этой точке.

## §2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Если в уравнении

$$y' = f(x,y). \quad (1)$$

$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ , то такое уравнение называется **уравнением с разделяющимися переменными**. Его общий вид:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y).$$

Предполагая, что  $f_2(y) \neq 0$ , преобразуем последнее уравнение:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

В обеих частях полученного уравнения стоят дифференциалы некоторых функций аргумента  $x$ . Из равенства дифференциалов этих функций следует, что сами функции отличаются одна от другой на константу.

Применим изложенный метод к задаче об эффективности рекламы.

Пусть торговой фирмой реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени  $t = 0$  из рекламы получили информацию  $x_0$  человек из общего числа  $N$  потенциальных покупателей. Далее эта информация распространяется посредством общения людей, и в момент времени  $t > 0$  число знающих о продукции людей равно  $x(t)$ . Сделаем предположение, что скорость роста числа знающих о продукции пропорциональна как числу осведомлённых в данный момент покупателей, так и числу неосведомлённых покупателей. Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x).$$

Здесь  $k$  – положительный коэффициент пропорциональности. Из уравнения получаем равенство дифференциалов двух функций аргумента  $t$ :

$$\frac{dx}{x(N - x)} = kdt.$$

Интегрируя левую и правую части, находим общее решение дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{N} \ln \frac{x}{N - x} = kt + C.$$

В общее решение входит неопределённая константа  $C$ . Полагая  $NC = D$ , получим равенство:

$$x/(N - x) = e^{Nkt + D},$$

из которого определим функцию  $x(t)$ :

$$x = \frac{N}{1 + Ee^{-Nkt}}.$$

Здесь  $E = e^{-D}$ . Такого вида функция называется логистической, а её график – логистической кривой.

Если теперь учесть, что  $x(0) = x_0$  и положить  $x_0 = N/\alpha$ , где  $\alpha > 0$ , то можно найти значение константы  $E$ . Логистическая функция примет вид:

$$x = \frac{N}{1 + (\alpha - 1)e^{-Nkt}}.$$

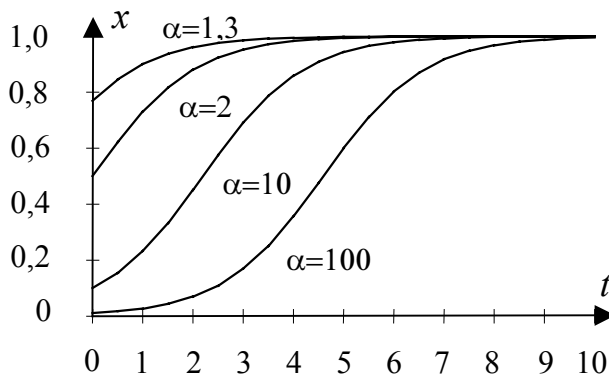


Рис.2

На рисунке 2 приведены примеры логистических кривых, полученных при различных значениях  $\alpha$ . Здесь величина  $N$  условно принималась за 1, а величина  $k$  бралась равной 0,5.

С помощью логистической функции описываются многие экономические, социальные,

технологические и биологические процессы, например, постоянный рост продаж, распространение слухов, распространение технических новшеств, рост популяции определенного вида животных и др.

### §3. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = B(x). \quad (1)$$

При  $a_0 \neq 0$  его можно представить в виде:

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (2)$$

где  $a(x) = a_1(x)/a_0(x)$  и  $b(x) = B(x)/a_0(x)$ .

Если правые части (1) и (2) равны нулю, то эти уравнения называются **однородными**, в противном случае – **неоднородными**.

Если в уравнении (1)  $a_0(x) = a_0$  и  $a_1(x) = a_1$ , то есть эти функции являются константами, то уравнение (1) называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородное уравнение

$$y' + ay = 0. \quad (3)$$

Перепишем его в виде:  $\frac{dy}{dx} = -ay$  или  $\frac{dy}{y} = -adx$ . Последнюю формулу можно

рассматривать как равенство дифференциалов функций одного и того же аргумента  $x$ . Интегрируя это равенство, получаем  $\ln y = -ax + C$ , или  $y = e^{-ax + C}$ , где  $C$  - произвольная константа. Если теперь ввести обозначение  $e^C = A$ , то можно представить так называемое **общее решение** уравнения (3) в виде:

$$y = Ae^{-ax}. \quad (4)$$

Это решение зависит от неопределенной константы  $A$ , придавая которой различные значения, можно получить все множество интегральных кривых уравнения (3). Если мы хотим найти интегральную кривую, проходящую через точку  $(x_1, y_1)$ , то нужно подставить координаты точки в формулу (4) и определить значение константы  $A$ . С этим значением константы  $A$  формула (4) будет определять лишь одну интегральную кривую или так называемое **частное решение** уравнения (3).

Как правило, задача ставится так: найти решение уравнения (3) при условии

$$y(0) = y_0. \quad (5)$$

Последняя формула называется **начальным условием** для уравнения (3).

Дифференциальное уравнение (3) при начальном условии (5) имеет единственное решение, которое определяется формулой

$$y(x) = y_0 e^{-ax}. \quad (6)$$

Заметим, что для задания начального условия, вообще говоря, не обязательно выбирать значение аргумента  $x$ , равное нулю. Как сказано выше, выделить единственное решение из множества, задаваемого формулой (4) (то есть определить константу  $A$ ), можно с помощью любого соотношения  $y(x_1) = y_1$ , считая его начальным условием.

Если в уравнении (3)  $a = 0$ , то интегрирование приводит к решению  $y(x) = C$ , то есть к константе, которая при начальном условии (5) равна  $y_0$ . Таким образом решение  $y(x)$  сохраняет начальное значение  $y_0$  при изменении  $x$ .

Рассмотрим теперь случай неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Пусть дано уравнение

$$y' + ay = b, \quad (b = \text{const}) \quad (7)$$

с начальным условием  $y(0) = y_0$ .

Введем новую неизвестную  $z = y - \frac{b}{a}$  (считаем, что  $a \neq 0$ ). Теперь уравнение (7) примет вид  $z' + a\left(z + \frac{b}{a}\right) = b$  или  $z' + az = 0$ . Как было показано выше, решением последнего уравнения является функция  $z = z_0 e^{-ax}$ , где  $z_0 = y_0 - \frac{b}{a}$ . Возвращаясь к изначальной неизвестной, получаем решение уравнения (7) при заданном начальном условии:

$$y(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right) e^{-ax} + \frac{b}{a} \quad (a \neq 0). \quad (8)$$

Если в уравнении (7)  $a = 0$ , то его решением при заданном начальном условии будет функция  $y(x) = bx + y_0$ .

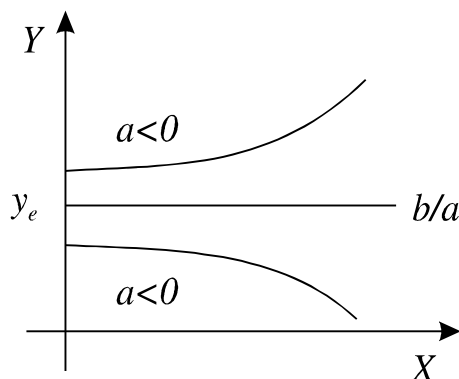


Рис.1.

Случай неустойчивого решения.

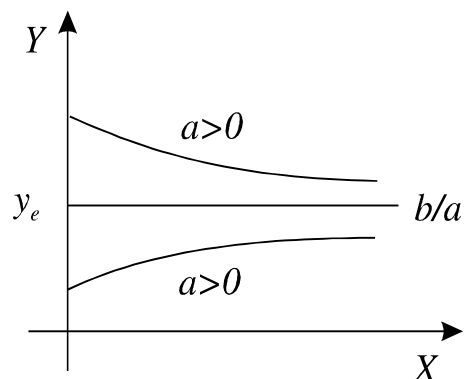


Рис.2.

Устойчивое решение.

Заметим, что решение (8) состоит из двух частей:  $y_h = Ae^{-ax}$  - решения однородного уравнения  $y' + ay = 0$  и  $y_0(x) = b/a$  - решения, которое назовем равновесным и которое получается, если в уравнении (7) положить  $y' = 0$ . Такое представление позволяет рассматривать решение (8) уравнения (7) как сумму равновесного или фиксированного значения  $y_e$  и отклонения или девиации  $y_h$  траектории  $y(x)$  от равновесного значения. Это отклонение возрастает экспоненциально с ростом  $x$  при  $a < 0$  и стремится к нулю при  $a > 0$ . В первом случае ( $a < 0$ ) решение называется **неустойчивым**, а во втором — **устойчивым** (асимптотически устойчивым).

Как показано на рисунках 1 и 2, отклонение  $y_h = (y_0 - y_e)e^{-ax}$  от уровня равновесия  $\frac{b}{a}$  уменьшается с ростом  $x$  при  $a > 0$  и увеличивается с ростом  $x$  при  $a < 0$ .

В качестве примера рассмотрим динамическую модель Вальраса устойчивости рынка. Она формулируется следующим образом. Имеется несколько продавцов и несколько покупателей некоторого товара. Некий посредник объявляет цену  $p$  на товар, после чего каждый продавец сообщает, сколько товара он может продать при такой цене. Суммарное количество товара, выставленное на продажу при данной цене, называется **предложением** и будет обозначаться  $S(p)$ . Также каждый покупатель сообщает, сколько товара он собирается купить при данной цене. Сумма потребностей покупателей в дальнейшем будет называться **спросом** и обозначаться  $D(p)$ . Введем понятие **избыточного спроса**  $E(p)$  как разности между спросом и предложением:  $E(p) = D(p) - S(p)$ . Если  $E(p) \geq 0$ , цена растет до тех пор, пока не будет достигнуто равновесие, которое определяется равенством спроса и предложения, то есть равенством  $D(p) = S(p)$  или  $E(p) = 0$ . Если  $E(p) \leq 0$ , то есть имеет место **избыточное предложение**, происходит снижение цены, пока не наступит равновесие. Здесь уместно сделать самое простое возможное предположение, заключающееся в том, что **скорость изменения цены во времени пропорциональна избыточному спросу**: малый избыточный спрос вызовет медленное увеличение цены товара, большой избыточный спрос – быстрое увеличение цены, малое избыточное предложение – медленное понижение цены и т. д. Отсюда следует уравнение

$$\frac{dp}{dt} = kE(p).$$

Здесь  $k$  - положительная константа, отражающая скорость процесса.

Пусть спрос и предложение являются линейными функциями цены:  $D(p) = \alpha + \beta p$  и  $S(p) = \gamma + \delta p$ . Тогда, приняв начальное условие  $p(0) = p_0$ , будем иметь уравнение

$$p'(t) = k(\alpha + \beta p - \gamma - \delta p) = k(\beta - \delta)p + k(\alpha - \gamma).$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, которое, как было показано выше, имеет решение

$$p(t) = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} + \left( p_0 - \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} \right) e^{k(\beta - \delta)t},$$

которое устойчиво, если  $\beta - \delta < 0$  и неустойчиво при  $\beta - \delta > 0$ . Но  $\beta$  - тангенс угла наклона кривой спроса, а  $\delta$  - тангенс угла наклона кривой предложения, и если

выполняется условие  $\beta - \delta < 0$  (которое верно при убывании спроса и возрастании предложения с ростом цены), рынок устойчив, то есть избыточный спрос снижается и окончательно устраняется возрастающей ценой. Если  $\beta - \delta > 0$ , рынок неустойчив: будет иметь место непрерывная и неограниченная инфляция.

Рассмотрим теперь **линейные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами**. Выпишем такое уравнение в общем виде:

$$y' + a(x)y = b(x). \quad (9)$$

Здесь  $a(x)$  - некоторая функция аргумента  $x$ . Как мы это делали раньше, вначале будем искать решение однородного уравнения, положив функцию  $b(x)$  в правой части (9) равной нулю. Представив уравнение  $y' + a(x)y = 0$  в виде

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$

после интегрирования получаем

$$\ln y + C = -\int a(x)dx$$

или

$$y(x) = e^{-C} e^{-\int a(x)dx} = A e^{-\int a(x)dx}. \quad (10)$$

Здесь  $A$  - неопределенная константа, которую можно найти из начального условия  $y(0) = 0$ .

Пример. Решить уравнение  $y' + 2xy = 0$  при начальном условии  $y(0) = 3$ .

В этом случае

$$a(x) = 2x, \quad e^{-\int a(x)dx} = e^{-\int 2x dx} = e^{-x^2}$$

и начальное условие определяет  $A = 3$ . Искомое решение имеет вид

$$y(x) = 3e^{-x^2}.$$

Перейдем к решению неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Положим в формуле (10)  $A = A(x)$ , то есть будем считать множитель  $A$  некоторой функцией от  $x$ . Этот метод называется **методом вариации произвольной постоянной**, и с его помощью мы попытаемся решить уравнение (9) при условии, что  $b(x)$  есть некоторая функция, не равная тождественно нулю. Из формулы (10) получаем:



$$y(x) = A(x)e^{-\int a(x)dx}; \quad y'(x) = A'(x)e^{-\int a(x)dx} - A(x)e^{-\int a(x)dx} a(x).$$

После подстановки этих выражений уравнение (9) принимает вид

$$A'(x)e^{-\int a(x)dx} - A(x)e^{-\int a(x)dx} a(x) + a(x)A(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x),$$

откуда следует уравнение относительно функции  $A(x)$ :

$$A'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx},$$

с решением

$$A(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx.$$

Подставив это выражение в (10), получим общее решение уравнения (9):

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx} \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx. \quad (11)$$

Пример. Решить уравнение  $y' + \frac{1}{x}y = x$  при начальном условии  $y(1) = 2$ .

(Заметим, что в данном случае нельзя задавать начальное условие при  $x = 0$ , так как это значение не принадлежит области  $B$  определения функции  $F$  (см. формулу (1) из §1).)

Для решения поставленной задачи можно было бы воспользоваться формулой (11), но мы пойдем другим путем: применим метод решения уравнений, которым была получена формула (11).

В нашем уравнении  $a(x) = \frac{1}{x}$ ;  $b(x) = x$ . Решение однородного уравнения  $y' + \frac{1}{x}y = 0$  получается из формулы (10):

$$y = Ae^{-\ln x} = \frac{A}{x}. \quad (12)$$

Реализуем теперь вариацию произвольной константы  $A$ , считая, что  $A = A(x)$  есть некоторая функция аргумента  $x$ . Тогда  $y' = \frac{x A'(x) - A(x)}{x^2}$ , и подставив это выражение вместе с приведенным выше выражением для  $y$  в исходное уравнение, получим:

$$\frac{x A'(x) - A(x)}{x^2} + \frac{A(x)}{x^2} = x,$$

откуда следует, что  $A'(x) = x^2$  или  $A(x) = \frac{x^3}{3} + C$ . Если теперь подставить это в формулу (12), то получится общее решение исходного уравнения:  $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ . С помощью начального условия найдем значение неопределенной константы  $C$  и выпишем решение поставленной задачи:  $y = \frac{x^2}{3} + \frac{5}{3x}$ .

### Упражнения

#### 1. Решить дифференциальные уравнения

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\operatorname{tg}x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg}y dy = 0$ ; | 2) $xy' - y = y^3$ ;                            |
| 3) $xyy' = 1 - x^2$ ;   | 4) $y - xy' = a(1 + x^2 y')$ ;                  |
| 5) $3e^x \operatorname{tg}y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$ ;               | 6) $y' \operatorname{tg}x = y$ ;                |
| 7) $y' = y \operatorname{tg}x + \cos x$ ;                                   | 8) $y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$ ;                |
| 9) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$ ;                                      | 10) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$ .      |
| 11) $(1 + y^2) dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy) dy$ ;                      | 12) $y' = 10^{x+y}$ ;                           |
| 13) $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$ ;  | 14) $y' + \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}} = 0$ ; |
| 15) $y' + 2y = 4x$ ;  | 16) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ;                    |