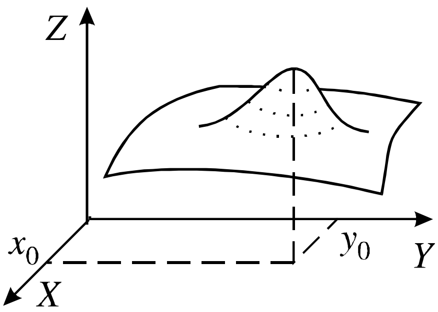
§5. Экстремум функции двух переменных.

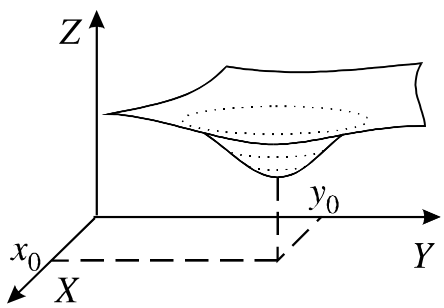
Точка $M_0(x_0,y_0)$ является **точкой максимума** (**минимума**) функции $z = f(x,y)$, если найдется такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ ($f(x,y) > f(x_0,y_0)$).

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**.



$M_0(x_0,y_0)$ - точка максимума.

Рис.1



$M_0(x_0,y_0)$ - точка минимума.

Рис. 2

Сформулируем **необходимое условие** экстремума. **Если в точке экстремума существует первая частная производная (по какому-либо аргументу), то она равна нулю.**

Точки экстремума **дифференцируемой** функции (то есть функции, имеющей непрерывные частные производные во всех точках некоторой области) надо искать только среди тех точек, в которых все первые частные производные равны нулю.

Там, где выполняется необходимое условие, экстремума может и не быть (здесь полная аналогия с функцией одной переменной).

Пример:

$$z = xy;\ z_x' = y;\ z_y' = x;\ z_x'(0,0) = 0;\ z_y'(0,0) = 0.$$

Обе частные производные в точке (0,0) обращаются в 0. Однако точка (0,0) не является точкой экстремума, так как в ней самой $z = 0$, а в любой её окрестности есть точки, где $z(x,y) > 0$ (это точки, лежащие внутри первого и третьего координатных углов), и есть точки, где $z(x,y) < 0$ (это точки, лежащие внутри второго и четвертого координатных углов).

Для ответа на вопрос, является ли точка области определения функции точкой экстремума, нужно использовать **достаточное условие экстремума**. Ниже приводится его формулировка.

Пусть $z_x'(x_0,y_0) = 0$ **и** $z_y'(x_0,y_0) = 0$**, а вторые частные производные функции** z **непрерывны в некоторой окрестности точки** (x_0,y_0). **Введем обозначения:** $A = z_{xx}''(x_0,y_0)$; $B = z_{xy}''(x_0,y_0)$; $C = z_{yy}''(x_0,y_0)$; $D = AC - B^2$.

Тогда, если $D < 0$**, то в точке** (x_0,y_0) **экстремума нет.**

Если $D > 0$**, то в точке** (x_0,y_0) **экстремум функции** z**, причем если** $A > 0$**, то минимум, а если** $A < 0$**, то максимум.**

Если $D = 0$**, то экстремум может быть, а может и не быть. В данном случае требуются дополнительные исследования**.

Исследование функции двух переменных на экстремум сводится к следующему: сначала выписываются необходимые условия экстремума:

$$z_x'(x,y) = 0;$$

$$z_y'(x,y) = 0$$

которые рассматриваются как система уравнений. Ее решением является некоторое множество точек. В каждой из этих точек вычисляются значения D и проверяется выполнение достаточных условий экстремума.

§6. Метод наименьших квадратов

Пусть проводится n однородных испытаний или экспериментов, и результатом каждого испытания является пара чисел – значений некоторых переменных x и y. Испытание с номером i приводит к числам x_i, y_i. В качестве испытания можно, например, рассматривать выбор определенного предприятия в данной отрасли промышленности, величиной x считать объем производства продукции (например в миллионах рублей), величиной y – объем экспорта этого вида продукции (в миллионах рублей), и обследовать n предприятий отрасли.

Итогом этих испытаний является таблица:

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

где каждому числу x_i (величину x рассматриваем как независимый показатель или фактор) поставлено в соответствие число y_i (величину y рассматриваем как зависимый показатель – результат).

В качестве значений x_i часто рассматриваются моменты времени: t_1, t_2, ..., t_n, взятые через равные промежутки. Тогда таблица

t	t_1	t_2	. . .	t_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

называется **временным рядом**.

Нас интересует вопрос, как найти приближенную формулу для функции $y = f(x)$, которая “наилучшим образом” описывала бы данные таблицы.

Пусть точки с координатами (x_i, y_i) группируются на плоскости вдоль некоторой прямой. Задача заключается в том, чтобы найти параметры a_0 и a_1 этой прямой:

$$y = a_0 + a_1 x, \qquad (1)$$

причем это нужно сделать так, чтобы она лучше любой другой прямой соответствовала расположению на плоскости экспериментальных точек (x_i, y_i).

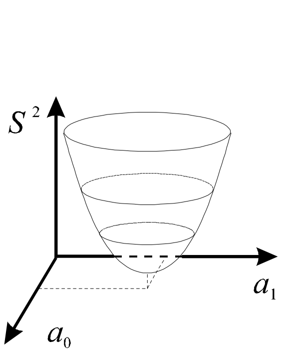
Признаком наилучшей прямой считается минимум суммы квадратов отклонений фактических значений y, полученных из таблицы, от вычисленных по формуле (1). Эта сумма квадратов рассчитывается по формуле

$$S^2 = (y_1 - (a_0 + a_1 x_1))^2 + (y_2 - (a_0 + a_1 x_2))^2 + ... + (y_n - (a_0 + a_1 x_n))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i\right)\right)^2 .$$

Обратим внимание на то, что все x_i и y_i — известные из таблицы числа, а S^2 есть функция двух переменных a_0 и a_1.

$$S^2 = S^2(a_0, a_1)$$



Можно показать, что график функции S^2 выглядит примерно так, как изображено на рисунке. Единственная точка, в которой обе частные производные $\dfrac{\partial S^2}{\partial a_0}$ и $\dfrac{\partial S^2}{\partial a_1}$ равны нулю, является точкой минимума.

Отсюда следует, что точку минимума можно искать, используя лишь необходимые условия экстремума:

$$S_{a_0}^{2}{}' = \sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_i - a_0 - a_1 x_i\right)\right) = 0, \qquad (2)$$

$$S_{a_1}^{2}{}' = \sum_{i=1}^{n}\left(-2x_i\left(y_i - a_0 - a_1 x_i\right)\right) = 0. \qquad (3)$$

На самом деле для фунуции $S^2 = S^2(a_0,a_1)$ достаточно легко проверить выполнение достаточных условия экстремума, тогда не нужно обращаться к графику функции. Проверку выполнения достаточных условий предоставляем читателю сделать самому.

Уравнения (2) и (3) можно преобразовать:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}. \qquad (4)$$

Получилась так называемая **система нормальных уравнений** относительно неизвестных величин a_0 и a_1.

Формула (1) с параметрами a_0, a_1 определенными из системы (4), называется **уравнением регрессии**. Прямая линия, описываемая этим уравнением, называется **линией регрессии**. Для временных рядов обычно вместо слова “регрессия” употребляется слово **тренд**.

Если экспериментальные точки в плоскости XOY группируются вдоль некоторой кривой линии, то можно подобрать вместо формулы (1) другую подходящую формулу, например, $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ или $y = a_0 \exp(a_1x)$ с параметрами соответственно a_0, a_1, a_2 и a_0, a_1, подставить ее в выражение $S^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y(x_i)\right)^2$ и искать минимум получившейся функции S^2 при помощи частных производных по параметрам.

Упражнения

1. Найти частные производные первого порядка от следующих функций:

1) $z = x^3 + y^3 - 3axy$;

2) $z = x^y$;

3) $z = \dfrac{x - y}{x + y}$;

4) $z = \mathrm{e}^{\sin\frac{y}{x}}$;

5) $z = \dfrac{y}{x}$;

6) $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$;