§4. Производная по направлению.

Пусть в плоскости XOY расположена точка $M_0(x_0,y_0)$. Зададим произвольный угол α и рассмотрим множество точек на той же плоскости, координаты которых определяются из формул

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ y = y_0 + t\sin\alpha. \qquad (1)$$

Здесь t - параметр, который может быть равен любому числу. Из формул (1) следует:

$$(y - y_0)/(x - x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Это означает, что все точки $M(x,y)$, координаты которых удовлетворяют равенствам (1), лежат на прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ и составляющей угол α с осью OX. Каждому значению t соответствует единственная точка $M(x,y)$, лежащая на этой прямой, причем согласно формуле (1) из §1 расстояние между точками $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$ равно t. Можно считать эту прямую числовой осью с положительным направлением, определяемым возрастанием параметра t. Обозначим положительное направление этой оси символом l.

Производной функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ по направлению l называется число

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\, y_0+t\sin\alpha) - f(x_0,y_0)}{t}. \qquad (2)$$

Производной функции по направлению можно дать геометрическую интерпретацию. Если через прямую l, определяемую формулами (1), провести вертикальную плоскость P (на самом деле в трехмерном пространстве уравнения (1) определяют эту самую плоскость), то эта плоскость пересечет поверхность-график функции $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ вдоль

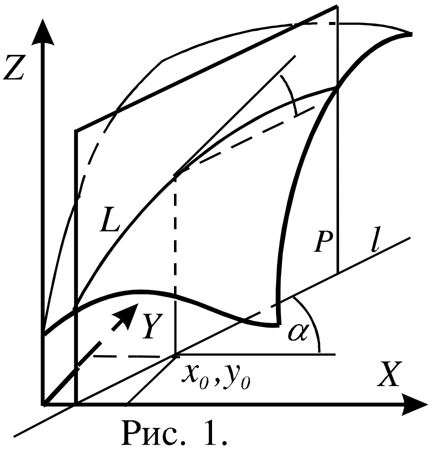

Рис. 1.

некоторой пространственной кривой L. Тангенс угла между горизонтальной плоскостью и касательной к этой кривой в точке $\boldsymbol{M}_0(x_0,y_0)$ равен производной функции в этой точке по направлению l.

В любом курсе математического анализа доказывается, что производная по направлению, определяемая формулой (2), может быть представлена в виде

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin\alpha\,. \qquad (3)$$

Заметим, что частная производная по x тоже является производной по направлению. Это направление определяется равенствами: $\cos\alpha = 1$; $\sin\alpha = 0$. Аналогично частная производная по y — это производная по направлению, которое можно задать условиями $\cos\alpha = 0$; $\sin\alpha = 1$.

Прежде, чем анализировать формулу (3), приведем некоторые понятия и факты из курса векторной алгебры. Пусть в плоскости с системой координат XOY задан направленный отрезок $\bar{r}$ или (что то же самое) вектор, причем точка $\boldsymbol{M}_0(x_0,y_0)$ является его начальной точкой, а $\boldsymbol{M}_1(x_1,y_1)$ - конечной точкой. Определим координату вектора по оси OX как число, равное $x_1 - x_0$, а координату по оси OY, как число, равное $y_1 - y_0$. Если задать упорядоченную пару любых чисел a и b, то эти числа можно рассматривать как координаты некоторого вектора $\bar{r}$ в плоскости XOY, причем длина этого вектора определена формулой

$$\rho=|\bar{r}|=\sqrt{a^2+b^2}\,,$$

а тангенс угла наклона γ вектора к оси OX определяется из формулы $\operatorname{tg}\gamma = b/a$ (отметим, что зная величину $\operatorname{tg}\gamma$, а также знак любого из чисел a и b, мы можем определить угол γ с точностью до 2π).

Представление вектора в виде пары его координат будем записывать в виде $\bar{r}(a;b)$ или $\bar{r}=\{a;b\}$. Такое представление имеет одну характерную особенность: оно **не определяет местоположение вектора на плоскости** XOY. Чтобы его определить, нужно наряду с координатами вектора задавать, например, координаты его начальной точки или, как её можно назвать, точки приложения вектора.

Если заданы два вектора: $\bar{a} = \{a_1; a_2\}$ и $\bar{b} = \{b_1; b_2\}$, то **скалярным произведением** $\bar{a}\bar{b}$ этих векторов называется число $|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$ (φ- угол между векторами).

В любом курсе векторной алгебры доказывается, что скалярное произведение векторов $\bar{a} = \{a_1; a_2\}$ и $\bar{b} = \{b_1; b_2\}$ равно сумме произведений одноименных координат этих векторов:

$$\bar{a}\bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \qquad (4)$$

Пусть в некоторой области G плоскости XOY задана функция $\boldsymbol{z = f(x,y)}$, имеющая непрерывные частные производные по обоим аргументам. Градиентом или вектором-градиентом $\overline{grad}\, f(x;y)$ функции $\boldsymbol{f(x,y)}$ в точке $(x,y) \in G$ называется вектор, который задается формулой

$$\overline{grad}\, f(x,y) = \left\{ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right\}.$$

Функция f определяет для каждой точки области G вектор-градиент, исходящий из этой точки.

Возвратимся теперь к формуле (3). Ее правую часть мы можем рассматривать, как скалярное произведение векторов. Первый из них - вектор-градиент функции $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ в точке $\boldsymbol{M}_0(x_0,y_0)$:

$$\overline{grad}\, f(x_0,y_0) = \left\{ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}; \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right\}.$$

Второй – вектор $\bar{e} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$. Это вектор, имеющий длину 1 и угол наклона к оси OX, равный α.

Теперь можно сделать вывод, что производная функции $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ по направлению, определяемому углом α наклона к оси OX, в точке $\boldsymbol{M}_0(x_0,y_0)$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l} = \left|\overline{grad}\, f(x_0;y_0)\right| \cos\beta. \qquad (5)$$

Здесь β - угол между вектором $\overline{grad}\, f(x_0,y_0)$ и вектором $\bar{e}$, задающим направление, по которому берется производная. Здесь также учтено, что $|\bar{e}| = 1$.

Из формулы (5) можно сделать очень важное заключение: **производная по направлению от функции $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ в точке $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$ достигает наибольшего**

значения, если это направление совпадает с направлением вектора-градиента функции в рассматриваемой точке, так как $\cos\beta \le 1$, и равенство достигается только если $\beta = 0$ (очевидно, что другие решения уравнения $\cos\beta = 1$ нас в данном случае не интересуют). Иначе можно сказать, что **вектор-градиент функции в точке направлен в сторону наискорейшего возрастания функции в этой точке**.

Кроме того из формулы (5) следует, что наибольшее значение производной по направлению в точке или наибольшее значение скорости возрастания функции в точке равно длине вектора-градиента функции в этой точке.

Пример. Требуется найти производную функции $z = \dfrac{y}{y-x}$ по направлению, составляющему угол в 60° с осью OX, в точке (1;3).

Найдем частные производные функции: $z'_x = \dfrac{y}{(y-x)^2}; z'_y = -\dfrac{x}{(y-x)^2}$ Теперь можно определить градиент функции в точке (1;3): $\overline{grad}z(1;3) = \left\{\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{4}\right\}$.

Принимая во внимание равенство $\bar{e} = \left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, воспользуемся формулой (4):

$$\frac{\partial z(1;3)}{\partial l} = \frac{3-\sqrt{3}}{8}.$$