§3. Дифференциал функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x,y)$, имеющую в точке $P_0(x_0,y_0)$ частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$. Перейдём от точки P_0 к точке $R_0(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, придавая переменным x и y в точке P_0 произвольные приращения Δx и Δy, соответственно. При этом функция в точке P_0 получит приращение

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f(R_0) - f(P_0).$$

Если приращение функции $f(x,y)$ можно представить в виде

$$\Delta f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x;\Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x;\Delta y)\Delta y, \qquad (1)$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0;\Delta y\to 0}\alpha(\Delta x;\Delta y) = \lim\limits_{\Delta x\to 0;\Delta y\to 0}\beta(\Delta x;\Delta y) = 0$, то функция называется **дифференцируемой** в точке $P_0(x_0,y_0)$. Сумма первых двух слагаемых в правой части равенства (1) называется **дифференциалом** функции $f(x,y)$ в точке P_0 и обозначается $df(x_0,y_0)$:

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y. \qquad (2)$$

Если точка, в которой вычисляется дифференциал не существенна, его принято обозначать просто df. Из определения следует, что **дифференциал представляет собой главную часть приращения функции, линейную относительно приращений её аргументов.** Полагая поочерёдно $f(x,y) = x$ и $f(x,y) = y$, получим, что дифференциалы dx и dy независимых аргументов функции x и y равны соответственно Δx и Δy . Таким образом

$$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy.$$

Раньше говорилось о том, что из существования частных производных в точке не следует непрерывности функции в этой точке. Однако, из справедливости равенства (1) следует

$$\lim_{\Delta x\to 0;\Delta y\to 0}\Delta f(x_0;y_0) = 0,$$

а это означает непрерывность функции в точке (x_0,y_0). Следовательно, **дифференцируемая в точке функция обязательно непрерывна в этой точке**.

Из сказанного следует, что существование обеих частных производных функции в точке не означает, что функция дифференцируема в этой точке. В курсе математического анализа доказывается теорема, что **функция дифференцируема в точке, если обе частные производные этой функции непрерывны в этой точке**.

На рисунке 1 график функции $z = f(x,y)$ представляет собой поверхность F. Длина отрезка P_0P равна значению функции z в точке P_0,

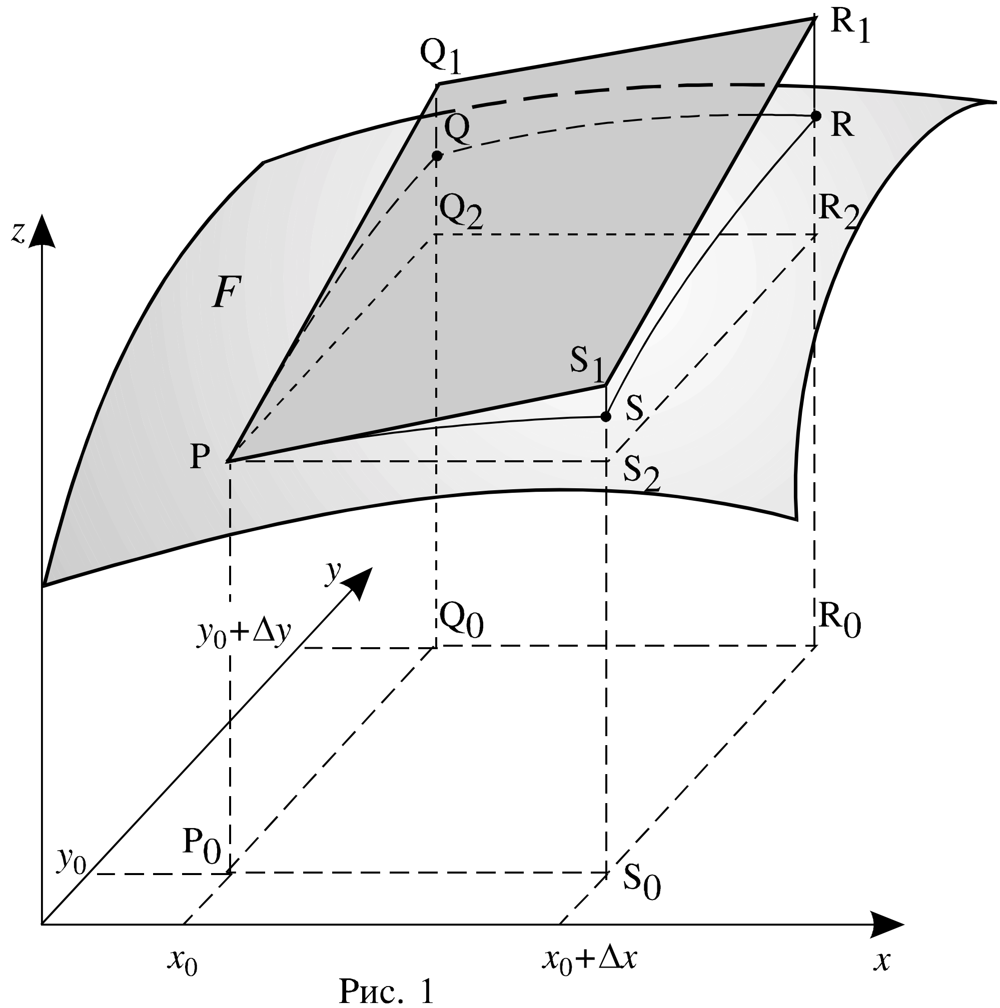

Рис. 1

то есть $|P_0P| = f(x_0,y_0)$ (на рисунке для наглядности поверхность F выбрана так, что все рассматриваемые значения функции и приращения в точке P_0 положительны, но это не ограничивает справедливости приведенных выше выводов и формул в общем случае). Координатами точек Q_0, S_0 и R_0 являются пары чисел соответственно $(x_0,y_0+\Delta y)$; $(x_0+\Delta x,y_0)$ и $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, причём $|Q_0Q| = f(Q_0)$, $|S_0S| = f(S_0)$ и $|R_0R| = f(R_0)$. Приращение $\Delta f(x_0,y_0)$ функции в точке P_0 равно $|RR_2|$.

Параллелограмм $PQ_1R_1S_1$ лежит в плоскости, которая касается поверхности F в точке P. Прямоугольник $PQ_2R_2S_2$ расположен в горизонтальной плоскости. Очевидно: $|Q_2Q_1| = f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ и $|S_2S_1| = f'_x(x_0,y_0)\Delta x$.

Из легко доказываемого равенства

$$|R_2R_1| = |S_2S_1| + |Q_2Q_1|$$

и формулы (2) следует, что дифференциал функции в точке P_0 равен $|R_2R_1|$.

Так как $df(x_0,y_0) \approx \Delta f(x_0,y_0)$, дифференциал df даёт приближенное значение приращения функции при малых значениях приращений аргументов.