

§12. Определенный интеграл

Пусть на промежутке $[a;b]$ задана функция $f(x)$. Будем считать функцию непрерывной, хотя это не обязательно. Выберем на промежутке $[a;b]$ произвольные числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$, удовлетворяющие условию: $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$. Эти числа разбивают промежуток $[a;b]$ на n более мелких промежутков: $[a;x_1], [x_1;x_2], \dots, [x_{n-1};b]$. На каждом из этих промежутков выберем произвольно по одной точке: $c_1 \in [a;x_1], c_2 \in [x_1;x_2], \dots, c_n \in [x_{n-1};b]$.

Введем обозначения: $\Delta x_1 = x_1 - a; \Delta x_2 = x_2 - x_1; \dots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$.

Составим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

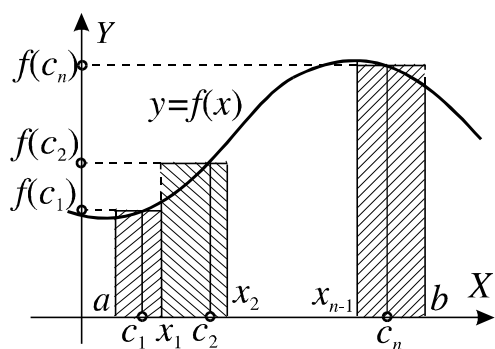


Рис. 1

Она называется **интегральной суммой** функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$. Очевидно, что интегральная сумма зависит от способа разбиения промежутка и от выбора точек c_i .

Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника, покрытого штриховкой на рисунке 1.

рисунке 1.

Введем обозначение: $\lambda = \max(\Delta x_i), i = 1, 2, \dots, n$. Величину λ иногда называют **параметром разбиения**.

Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю. **Определенным интегралом**

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма при этом процессе, если предел существует:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty; \lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения промежутка $[a; b]$ и выбора точек c_i .

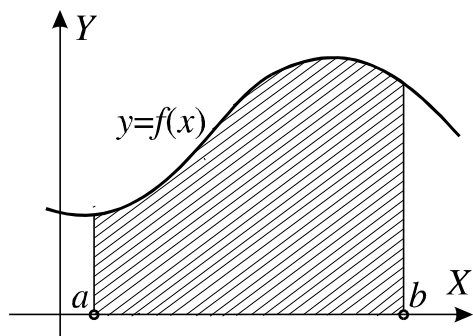


Рис. 2

Число a называется **нижним пределом интегрирования**, а число b — **верхним пределом интегрирования**.

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной, неотрицательной на промежутке $[a; b]$ функции $f(x)$, отрезком $[a; b]$ оси X , и прямыми $x = a$; $x = b$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией. На рисунке 2 криволинейная трапеция выделена штриховкой. Площадь S этой трапеции определяется формулой

$$S = I = \int_a^b f(x) dx.$$

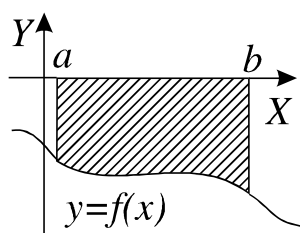


Рис. 3

Если $f(x) < 0$ во всех точках промежутка $[a; b]$ и непрерывна на этом промежутке (например, как изображено на рисунке 3), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a; b]$ горизонтальной оси координат, прямыми $x = a$; $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, определяется формулой

$$S = - \int_a^b f(x) dx.$$

Перечислим свойства определенного интеграла:

$$1) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (\text{здесь } k - \text{ произвольное число});$$

$$2) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$4) \text{ Если } c \in [a; b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Из этих свойств следует, например, что $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$.

Все приведенные выше свойства непосредственно следуют из определения определенного интеграла.

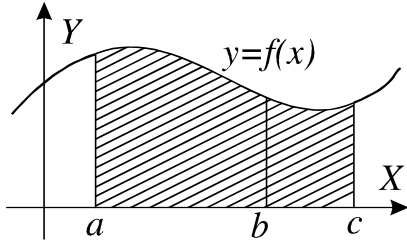


Рис. 4

Оказывается, что формула из пункта 4 справедлива и тогда, когда $c \notin [a; b]$. Пусть, например, $c > b$, как изображено на рисунке 4. В этом случае верны равенства

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

§13. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на некотором промежутке, содержащем точку a . Тогда каждому числу x из этого промежутка можно поставить в соответствие число

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

определив тем самым на промежутке функцию $I(x)$, которая называется определенным интегралом с переменным верхним пределом. Отметим, что в

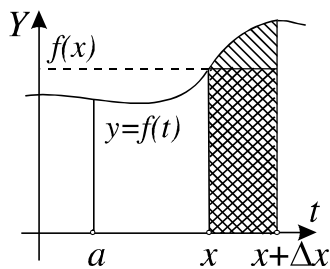


Рис. 1

точке $x = a$ эта функция равна нулю. Вычислим производную этой функции в точке x . Для этого сначала рассмотрим приращение функции в точке x при приращении аргумента Δx :

$$\Delta I(x) = I(x + \Delta x) - I(x) =$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt =$$

$$= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Как показано на рисунке 1, величина последнего интеграла в формуле для приращения $\Delta I(x)$ равна площади криволинейной трапеции, отмеченной штриховкой. При малых величинах Δx (здесь, так же как и везде в этом курсе, говоря о малых величинах приращений аргумента или функции, имеем в виду абсолютные величины приращений, так как сами приращения могут быть и положительными и отрицательными) эта площадь оказывается приблизительно равной площади прямоугольника, отмеченного на рисунке двойной штриховкой. Площадь прямоугольника определяется формулой $f(x)\Delta x$. Отсюда получаем соотношение

$$\Delta I(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \approx f(x)\Delta x.$$

В последнем приближенном равенстве точность приближения тем выше, чем меньше величина Δx .

Из сказанного следует формула для производной функции $I(x)$:

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x).$$

Производная определенного интеграла по верхнему пределу в точке x равна значению подынтегральной функции в точке x . Отсюда следует, что функция $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ является первообразной для функции $f(x)$, причем такой первообразной, которая принимает в точке $x = a$ значение, равное нулю. Этот факт дает возможность представить определенный интеграл в виде

$$\int_a^x f(t) dt = I(x) - I(a). \quad (1)$$

Пусть $F(x)$ тоже является первообразной для функции $f(x)$, тогда по теореме об общем виде всех первообразных функции $I(x) = F(x) + C$, где C — некоторое число. При этом правая часть формулы (1) принимает вид

$$I(x) - I(a) = F(x) + C - (F(a) + C) = F(x) - F(a). \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) после замены x на b следует формула для вычисления определенного интеграла от функции $f(t)$ по промежутку $[a; b]$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

которая называется формулой **Ньютона-Лейбница**. Здесь $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[a; b]$, нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и подсчитать разность значений первообразной в точках b и a . Разность этих значений первообразной принято обозначать символом $F(x) \Big|_a^b$.

Приведем примеры вычисления определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Примеры. 1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

2. $I = \int_0^1 x e^x dx.$

Сначала вычислим неопределенный интеграл от функции $f(x) = x e^x$. Используя метод интегрирования по частям, получаем: $\int x e^x dx = e^x(x-1) + C$. В качестве первообразной функции $f(x)$ выберем функцию $e^x(x-1)$ и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$I = e^x(x-1) \Big|_0^1 = 1.$$

При вычислении определенных интегралов можно применять **формулу замены переменной в определенном интеграле**:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Здесь α и β определяются, соответственно, из уравнений $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, а функции f , φ , φ' должны быть непрерывны на соответствующих промежутках.

Пример: $I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x}.$

Сделаем замену: $\ln x = t$ или $x = e^t$, тогда если $x = 1$, то $t = 0$, а если $x = e$, то $t = 1$. В результате получим:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln e^t e^t dt}{e^t} = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

При замене переменной в определенном интеграле не нужно возвращаться к исходной переменной интегрирования.

§14. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Если положить промежуток интегрирования бесконечным, то приведенное выше определение определенного интеграла теряет смысл, например, потому что невозможно осуществить условия $n \rightarrow \infty$; $\lambda \rightarrow 0$ для бесконечного промежутка. Для такого интеграла требуется специальное определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на полубесконечном промежутке $[a; \infty)$, тогда **несобственным интегралом с бесконечным пределом** $\int_a^\infty f(x) dx$ называется $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, если предел существует. Если этот предел не существует, то не существует и несобственный интеграл. В этом случае принято говорить, что несобственный интеграл **расходится**. При существовании предела говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Аналогично

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \right).$$

Примеры: 1. $I = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$. Очевидно: $\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}$, откуда следует

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

2. $I = \int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_4^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_4^b = \lim_{b \rightarrow \infty} 2(\sqrt{b} - 2)$; этот предел не существует, следовательно, не существует или расходится интеграл I .

3. $I = \int_e^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - 1)$; здесь предел также не существует, и интеграл расходится.

Упражнения

1. Найти производные от следующих функций:

1) $y = x^6 - 3x^5 + 2x^2 + 1;$

2) $y = \operatorname{arctg}x + \operatorname{arcctg}x;$

3) $y = 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-3};$

3) $y = (x^2 - 2x + 2)^x;$

5) $y = 5\operatorname{tg}x - 3\operatorname{ctg}x;$

6) $y = x \operatorname{arcsin}x;$

7) $y = 2t \operatorname{sin}t - (t^2 - 2)\operatorname{cos}t;$

8) $y = \log_7 x \cdot \operatorname{arcctg}x;$

9) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 5};$

10) $y = \frac{x^5}{6^x};$

11) $y = \left(1 + x^3\right) \left(5 + \frac{1}{x^2}\right)$ где $x = 1;$

12) $y = \frac{\operatorname{arccos}x}{x^9};$

13) $y = \frac{\operatorname{cos}t}{1 - \operatorname{sin}t}$ где $t = \pi / 6;$

14) $y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$

15) $y = \frac{e^x + \operatorname{sin}x}{xe^x};$

16) $y = 7^x \operatorname{arccos}x.$