## §6. Формула Лагранжа

Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$ и дифференцируема на открытом промежутке $(a, b)$, то можно найти такую точку $c$, принадлежащую промежутку $(a, b)$, для которой справедливо равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (1)$$

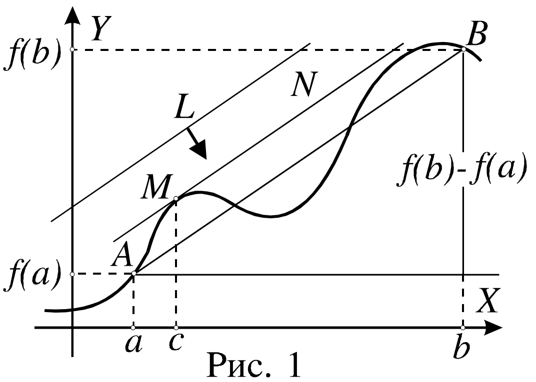

Рис. 1

Эта формула называется формулой конечных приращений Лагранжа. Проведем наглядное обоснование этой формулы. Возьмем на графике функции $f(x)$ точки $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$. Проведем через эти точки прямую $AB$. Проведем также прямую $L$, параллельную прямой $AB$, так, чтобы она не пересекала график функции $f(x)$ на промежутке $(a, b)$. Сохраняя параллельность $L$ и $AB$, будем "надвигать" прямую $L$ на график $f(x)$ до тех пор, пока прямая $L$ не коснется графика $f(x)$ в некоторой точке $c$ промежутка $(a, b)$. Геометрическую точку касания обозначим буквой $M$, а через $MN$ обозначим касательную к графику $f(x)$, параллельную прямой $AB$. Очевидно, угловые коэффициенты прямых $MN$ и $AB$ (то есть тангенсы углов наклона прямых к оси абсцисс) равны. Угловой коэффициент прямой $MN$ равен $f'(c)$, а угловой коэффициент прямой $AB$ равен $(f(b)$ □□$f(b))/(b-a)$, и справедлива формула:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отсюда сразу получается формула (1). На приведенном рисунке видно, что могут существовать другие точки, принадлежащие промежутку $(a, b)$, в которых касательные к графику функции $f(x)$ параллельны прямой $MN$. Производную функции $f(x)$, вычисленную в любой из этих точек, можно подставить в правую часть формулы (1) вместо множителя $f'(c)$.

Сформулируем теорему о монотонности функции. **Если $f'(x) > 0$ на промежутке $(a;b)$, то на $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает. Если $f'(x) < 0$ на промежутке $(a;b)$, то на $(a;b)$ функция $f(x)$ убывает.**

Докажем эту теорему. Пусть $t_1$ и $t_2$ — любые числа из промежутка $(a;b)$, причем $t_2>t_1$. Тогда по теореме Лагранжа можно указать такое число $c$ из промежутка $(t_1;t_2)$, для которого справедливо равенство $f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$. Если $f'(x) > 0$ для всех $x$ из промежутка $(a;b)$, то $f'(c) > 0$, и из условия $t_2 > t_1$ следует, что $f(t_2) - f(t_1) > 0$. Таким образом, возрастание функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ доказано. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

## §7. Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Точка $x_0$ называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки $x$ из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) > f(x_0).$$

Точка $x_0$ называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки $x$ из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) < f(x_0).$$

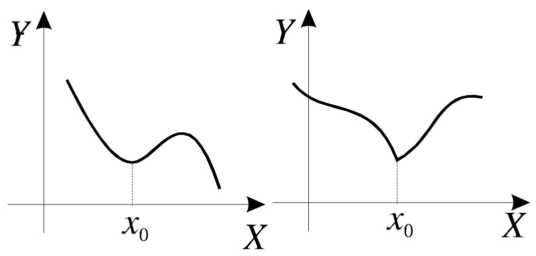


Рис.1

Примеры точек минимума.

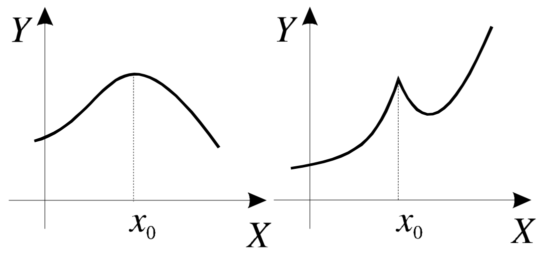


Рис. 2

Примеры точек максимума.

Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Сформулируем теорему о необходимом условии экстремума функции: **если в точке экстремума функция** $f(x)$ **имеет производную**, **то производная равна нулю**.

Отсюда следует, что точки экстремума функции следует искать среди тех точек её области определения, где производная функции равна нулю или не существует.

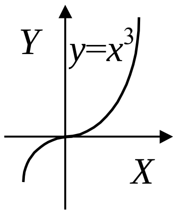

Рис. 3

Если $f'(x_0) = 0$, это еще не значит, что в точке $x_0$ есть экстремум. Примером может служить функция $y=x^3$. В точке $x=0$ её производная равна нулю, но экстремума функция не имеет. График функции изображен на рисунке 3.

Точка, в которой производная равна нулю, называется **стационарной**.

Точки области определения функции, в которых производная либо равна нулю, либо не существует, называются **критическими**.

Как было показано выше, с помощью необходимого условия нельзя определить, является ли данная точка точкой экстремума, тем более указать, какой экстремум реализуется – максимум или минимум. Для того, чтобы ответить на эти вопросы, сформулируем и докажем теорему, которая называется **достаточным условием экстремума**.

**Пусть функция** $f(x)$ **непрерывна в точке** $x_0$. **Тогда**:

1) **если** $f'(x) < 0$ **на** $(a;x_0)$ **и** $f'(x) > 0$ **на** $(x_0;b)$, **то точка** $x_0$ – **точка минимума функции** $f(x)$;

2) **если** $f'(x) > 0$ **на** $(a;x_0)$ **и** $f'(x) < 0$ на $(x_0;b)$, **то точка** $x_0$ – **точка максимума функции** $f(x)$;

Докажем первое утверждение теоремы.

Так как $f'(x) < 0$ на $(a;x_0)$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, то $f(x)$ убывает на $(a;x_0]$, и для любого $x \in (a;x_0)$ выполняется условие $f(x)>f(x_0)$.

Так как $f'(x) > 0$ на $(x_0;b)$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, то $f(x)$ возрастает на $(x_0;b]$, и для любого $x \in (x_0;b)$ выполняется условие $f(x)>f(x_0)$.

В результате получается, что при любом $x \neq x_0$ из $(a;b)$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, то есть точка $x_0$ – точка минимума $f(x)$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

## §8. Выпуклость и вогнутость функции

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка $(a;b)$. Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен выше любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **вогнутой** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вниз").

Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен ниже любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **выпуклой** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вверх").

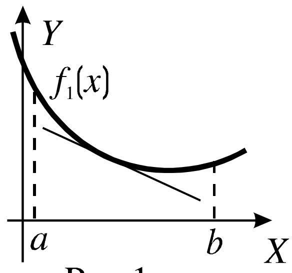


Рис.1
Функция $f_1(x)$ вогнута
на промежутке $(a;b)$

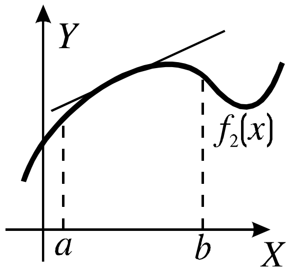


Рис. 2
Функция $f_1(x)$ выпукла
на промежутке $(a;b)$

Точка $x_0$ называется **точкой перегиба** функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет производную и существуют два промежутка: $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$, на одном из которых функция выпукла, а на другом вогнута.

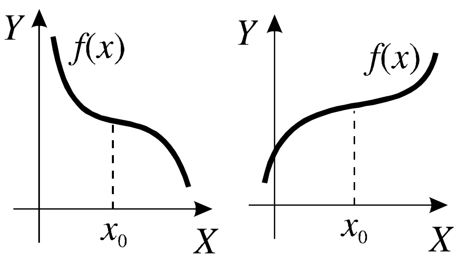


Рис. 3
Примеры точек перегиба.

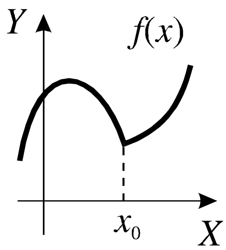


Рис..4
Угловая точка не является
точкой перегиба.

Будем называть функцию **возрастающей в точке** $x_0$, если она непрерывна в этой точке и возрастает в некоторой ее окрестности. Подобным образом можно определить функцию, убывающую в точке.

Приведем без доказательства важную для исследования функций теорему.

**Если** $f''(x) > 0$ **на промежутке** $(a;b)$, **то на этом промежутке функция** $f(x)$ **вогнута**. **Если** $f''(x) < 0$ **на промежутке** $(a;b)$, **то на этом промежутке функция** $f(x)$ **выпукла**.

Из положительности второй производной функции на промежутке следует возрастание первой производной на этом промежутке, а это, как показано на рисунке 5, – признак вогнутой функции. Аналогичным образом иллюстрируется второе утверждение теоремы.

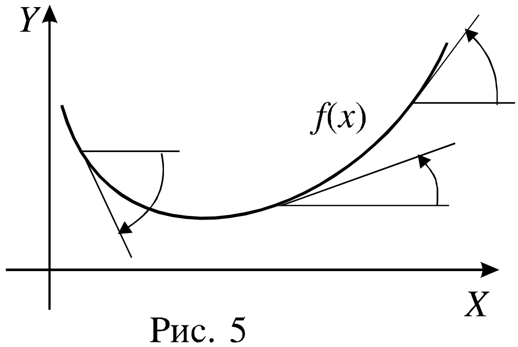


Рис. 5
Вогнутая функция.
Тангенс угла наклона
касательной возрастает.

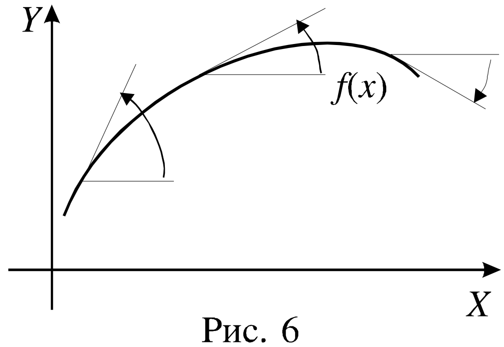


Рис. 6
Выпуклая функция.
Тангенс угла наклона
касательной убывает.

Если $x_0$ – точка перегиба функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Приведем другую формулировку достаточных условий экстремума функции.

Если в точке $x_0$ выполняются условия:

1) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) < 0$, тогда $x_0$ – точка максимума;

2) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) > 0$, тогда $x_0$ – точка минимума;

3) $f'(x_0) = 0$**;** $f''(x_0) = 0$**,** тогда вопрос о поведении функции в точке остается открытым. Здесь может быть экстремум, например в точке $x_0 = 0$ у функции $y = x^4$, но может его не быть, например в точке $x_0 = 0$ у функции $y = x^5$. В этом случае для решения вопроса о наличии экстремума в стационарной точке можно использовать достаточные условия экстремума, приведенные выше.

Рассмотрим пример из микроэкономики.

В количественной теории полезности предполагается, что потребитель может дать количественную оценку (в некоторых единицах измерения) полезности любого количества потребляемого им товара.

Это означает существование **функции полезности** $TU$ аргумента $Q$ – количества купленного товара. Введём понятие **предельной полезности**, как добавочной полезности, прибавляемой каждой последней порцией товара. Далее построим двумерную систему координат, откладывая по горизонтальной оси

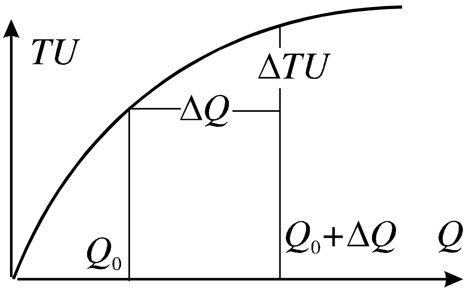

Рис. 7

количество потребляемого товара $Q$, а по вертикальной оси – общую полезность $TU$, как это сделано на рисунке 7. В этой системе координат проведем график функции $TU = TU(Q)$. Точка $Q_0$ на горизонтальной оси означает количество приобретенного товара, величина $\Delta Q$ –добавочный приобретенный товар. Разность $\Delta TU = TU(Q_0 + \Delta Q) - TU(Q_0)$ - добавочная полезность, полученная от покупки "довеска" $\Delta Q$. Тогда добавочная полезность от последней приобретенной порции (или единицы количества) товара вычисляется по формуле $\Delta TU / \Delta Q$ (Курс экономической теории. Под общей редакцией проф. Чепурина М.Н. 1995, стр. 122). Эта дробь, как можно видеть, зависит от величины $\Delta Q$. Если здесь перейти к пределу при $\Delta Q \to 0$, то получится формула для определения предельной полезности $MU$:

$$MU = \frac{dTU}{dQ}.$$

Это означает, что **предельная полезность равна производной функции полезности** $TU(Q)$. **Закон убывающей предельной полезности** сводится к уменьшению этой производной с ростом величины $Q$. Отсюда следует выпуклость графика функции $TU(Q)$. Понятие функции полезности и представление предельной полезности в виде производной этой функции широко используется в математической экономике.