§3. Производная

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную в некоторой окрестности точки x. Пусть $\Delta x -$ приращение аргумента в точке x. Обозначим через Δy или Δf приращение функции, равное $f(x+\Delta x)-f(x)$. Отметим здесь, что функция непрерывна в точке x, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δf.

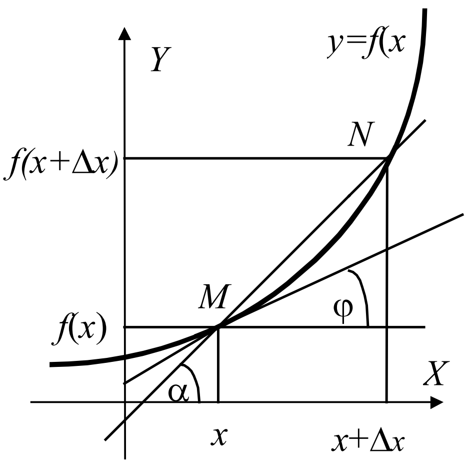

Рис. 1

Отношение $\Delta f/\Delta x$, как видно из рисунка 1, равно тангенсу угла α, который составляет секущая MN кривой $y=f(x)$ с положительным направлением горизонтальной оси координат.

Представим себе процесс, в котором величина Δx, неограниченно уменьшаясь, стремится к нулю. При этом точка N будет двигаться вдоль кривой $y=f(x)$, приближаясь к точке M, а секущая MN будет вращаться около точки M так, что при очень малых величинах Δx её угол наклона α будет сколь угодно близок к углу φ наклона касательной к кривой в точке x. Следует отметить, что все сказанное относится к случаю, когда график функции $y=f(x)$ не имеет излома или разрыва в точке x, то есть в этой точке можно провести касательную к графику функции.

Отношение $\Delta y/\Delta x$ или, что то же самое $(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$, можно рассматривать при заданном x как функцию аргумента Δx. Эта функция не определена в точке $\Delta x=0$. Однако её предел в этой точке может существовать.

Если существует предел отношения $(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$ в точке $\Delta x=0$, то он называется **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается y' или $f'(x)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции $y=f(x)$ называется **дифференцированием**.

Если для любого числа x из открытого промежутка (a, b) можно вычислить $f'(x)$, то функция $f(x)$ называется **дифференцируемой на промежутке (a, b)**.

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции $f(x)$ в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Производная – это скорость изменения функции в точке x. Из определения производной следует, что $f'(x) \approx \Delta f / \Delta x$, причем точность этого приближенного равенства тем выше, чем меньше Δx. Производная $f'(x)$ является приближенным коэффициентом пропорциональности между Δf и Δx.

Производная функции $f(x)$ не существует в тех точках, в которых функция не является непрерывной. В то же время функция может быть непрерывной в точке x_0, но не иметь в этой точке производной. Такую точку назовём угловой точкой графика функции или точкой излома. Графические примеры приведены на рисунке 2.

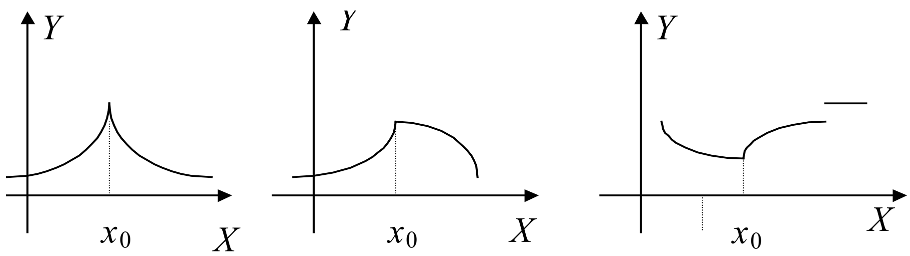

Рис. 2

Так функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, хотя является непрерывной в этой точке.

Ниже приводится таблица производных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
x	1	$\ln x$	$1/x$	$\mathrm{tg} x$	$1/\cos^2 x$
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin a$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$\arccos a$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$1/x$	$-1/x^2$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{arctg} x$	$1/(1+x^2)$

Приведем теперь основные свойства производной.

1. Если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке.

2. Если существует $f'(x)$, и C - произвольное число, то функция $Cf(x)$ имеет производную: $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

3. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то функция $S(x) = f(x) + g(x)$ имеет производную: $S'(x) = f'(x) + g'(x)$.

4. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то функция $P(x) = f(x)g(x)$ имеет производную: $P'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

5. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$ и при этом $g(x) \neq 0$, то функция $D(x) = f(x) / g(x)$ имеет производную: $D'(x) = (f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)) / g^2(x)$.

В любом курсе математического анализа доказывается теорема о **производной сложной функции**. Мы ограничимся лишь ее формулировкой.

Пусть функция $g(x)$ имеет производную в точке x, а функция $f(z)$ имеет производную в точке $z = g(x)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(\mathrm{g}(x))$ имеет в точке x производную $F'(x) = f'(z)\, \mathrm{g}'(x)$.

Приведем примеры вычисления производной сложной функции.

$$F(x) = \sin^2 x,\ F'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x;$$
$$F(x) = \sin x^2,\ F'(x) = 2x\cos x^2;$$
$$F(x) = \ln\cos x, F'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\mathrm{tg}x;$$
$$F(x) = \cos\ln x, F'(x) = (-\sin\ln x)\frac{1}{x}.$$

§4. Дифференциал функции

Рассмотрим две функции: $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, которые имеют производные $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ в каждой точке некоторой области D. Возьмем какую-либо точку x из области D и дадим аргументу приращение Δx. Тогда функции получат соответственно приращения $\Delta y_1 = f_1(x + \Delta x) - f_1(x)$ и $\Delta y_2 = f_2(x + \Delta x) - f_2(x)$. Из графиков, изображенных на рисунке 3, видно, что в обоих случаях приращения Δy_1 и Δy_2 можно представить в виде сумм двух слагаемых:

$$\Delta y_1 = (C_1 - A_1) + (B_1 - C_1); \quad \Delta y_2 = (C_2 - A_2) + (B_2 - C_2) \qquad (1)$$

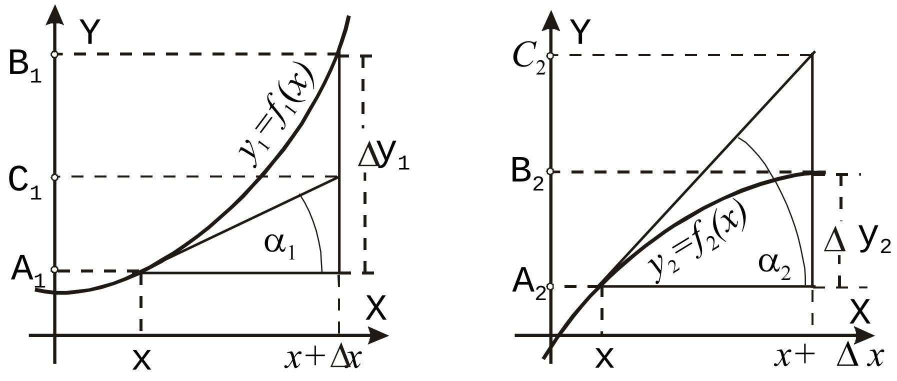

Рис.3

Первые слагаемые в правых частях обоих выражений (1) легко вычисляются из сходных формул: $C_1 - A_1 = \mathrm{tg}\alpha_1\,\Delta x = f_1{}'(x)\Delta x$; $C_2 - A_2 = \mathrm{tg}\alpha_2\,\Delta x = f_2{}'(x)\Delta x$.

Величина $f'(x)\,\Delta x$ называется главной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x. (Здесь мы говорим только о функции, имеющей в точке x производную). Главная часть приращения функции линейна относительно приращения аргумента Δx (можно сказать – пропорциональна приращению Δx). Это означает, что если приращение аргумента Δx уменьшить в k раз, то и главная часть приращения функции уменьшится в k раз.

Формулы (1) можно переписать в виде:

$$\Delta y_1 = f_1{}'\Delta x + r_1; \quad \Delta y_2 = f_2{}'\Delta x + r_2. \qquad (2)$$

Здесь $r_1 = B_1 - C_1$; $r_2 = B_2 - C_2$.

Величины r_1 и r_2 в формулах (2) при уменьшении Δx в k раз уменьшаются более чем в k раз, что можно видеть, сравнивая рисунки 3 и 4, и говорят, что r_1 и r_2 стремятся к нулю быстрее, чем Δx .

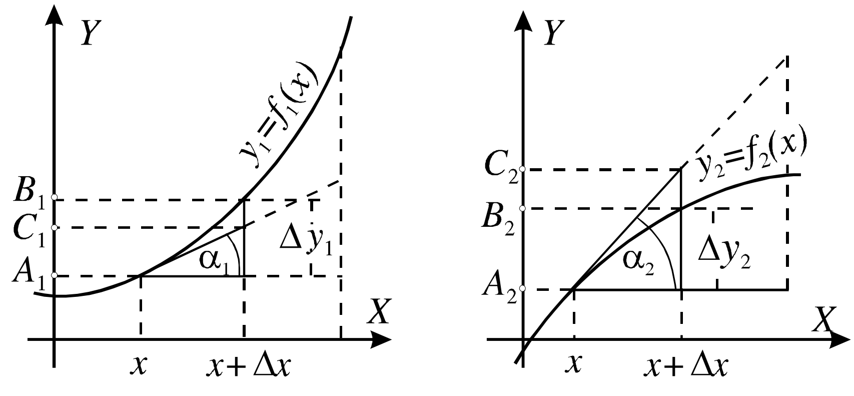

Рис. 4

Назовем функцию $\beta(z)$ **бесконечно малой** в точке $z = z_0$, если $\lim\limits_{z\to z_0} \beta(z) = 0$.

Пусть функции $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ являются бесконечно малыми в точке $z = z_0$.. Функция $\beta(z)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\gamma(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\beta(z)}{\gamma(z)} = 0$.

Величины r_1 и r_2 в формулах (2) являются функциями аргумента Δx, бесконечно малыми в точке $\Delta x = 0$. Можно показать, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{r_i(\Delta x)}{\Delta x} = 0; \ \ i = 1{,}2$.

Это означает, что **функции** $r_1(\Delta x)$ и $r_2(\Delta x)$ **являются бесконечно малыми функциями более высокого порядка, чем** Δx, **в точке** $\Delta x = 0$.

Таким образом приращение функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке, в которой существует её производная, может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \beta(\Delta x),$$

где $\beta(\Delta x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx, в точке $\Delta x = \mathbf{0}$.

Главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции $y = f(x)$, равная $f'(x)\,\Delta x$, называется **дифференциалом** и обозначается dy:

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \qquad (3)$$

Если сюда подставить функцию $f(x) = x$, то, так как $x' = 1$, формула (3) примет вид: $dx = \Delta x$. Эта формула легко истолковывается с помощью графика функции $y = x$, из которого видно, что приращение этой функции содержит лишь главную часть. Таким образом, для функции $y = x$ приращение совпадает с дифференциалом. Теперь формулу дифференциала (3) можно переписать так

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

то есть **производная функции** $f(x)$ **равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента** $\boldsymbol{x}$.

Очевидны следующие свойства дифференциала.

1. $dC = 0$ (здесь и в следующей формуле C – постоянная);

2. $d(Cf(x)) = Cdf(x)$;

3. Если существуют $df(x)$ и $dg(x)$, то $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$, $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$. Если при этом $g(x) \neq 0$, то $d\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$

Пусть $y = f(x)$ - функция, имеющая производную в точке x, тогда $dy = df(x) = f'(x)dx$. Если аргумент x является функцией $x(t)$ некоторой независимой переменной t, то $y = F(t) = f(x(t))$ –сложная функция от t, и её дифференциал вычисляется по формуле $dy = F'(t)dt = f'(x)x'(t)dt$. Однако по определению дифференциала $x'(t)dt = dx$ и последняя формула преобразуется к виду: $dy = f'(x)dx$.

Таким образом если аргумент функции $y=f(x)$ рассматривать как функцию другого аргумента так, что равенство $\Delta x = dx$ не выполняется, формула дифференциала функции $f(x)$ остается неизменной. Это свойство принято называть свойством **инвариантности дифференциала**.

§5. Производные высших порядков.

Может оказаться что функция $f'(x)$, называемая первой производной, тоже имеет производную $(f'(x))'$. Эта производная называется **второй производной** функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Если f есть координата движущейся точки и является функцией времени, то мгновенная скорость точки в момент времени t равна $f'(t)$, а ускорение равно $f''(t)$.

Вторая производная также может быть функцией, определенной на некотором множестве. Если эта функция имеет производную, то эта производная называется **третьей производной** функции $f(x)$ и обозначается $f'''(x)$.

Если определена n-я производная $f^{(n)}(x)$ и существует её производная, то она называется $(n+1)$-й производной функции $f(x)$: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$.

Все производные, начиная со второй, называются **производными высших порядков.**