Глава 2. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной

§1. Основные понятия

Пусть D **— некоторое множество чисел. Если задан закон, по которому каждому числу** x **из множества** D **ставится в соответствие единственное определенное число** y**, то будем говорить, что на множестве** D **задана функция, которую назовём** f**. Число** y **— это значение функции** f **в точке** x**, что обозначается формулой** $y = f(x)$**.**

Число x называется аргументом функции, множество D — областью определения функции, а все значения y образуют множество E, которое называется множеством значений или областью изменения функции.

Функция f **называется возрастающей (убывающей) на множестве** G**, если для любых чисел** x_1 **и** x_2 **из множества** G**, таких что** $x_1 < x_2$**, выполняется условие** $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Так как между множеством действительных чисел и множеством точек числовой оси можно установить взаимно-однозначное соответствие, в дальнейшем изложении понятиям "число x" и "точка x числовой оси" в некоторых случаях будет придаваться один и тот же смысл. Например, вместо "значение функции при значении аргумента, равном x_1" будет говориться "значение функции в точке x_1". В нижеследующем определении можно везде заменить выражение "точка x" на выражение "число x".

Пусть ε — некоторое положительное число. **ε-окрестностью** точки x_0 называется множество всех точек x, принадлежащих промежутку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, кроме самой точки x_0. Принадлежность точки x ε-окрестности точки x_0 можно выразить с помощью двойного неравенства

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Число ε называется **радиусом окрестности**.

§2. Предел и непрерывность функции

Рассмотрим функцию $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$. Значение функции в этой точке равно 4.

Отметим одну особенность поведения функции в этой точке. Можно

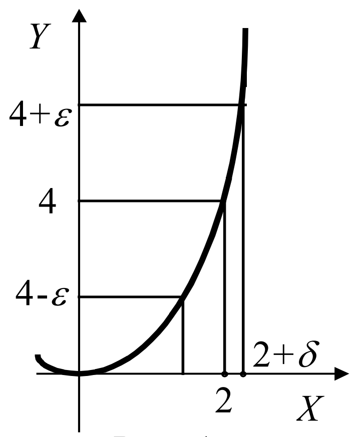

Рис. 1

выбрать какое-либо положительное число ε и построить ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Очевидно, что найдется такая окрестность точки $x_0 = 2$ (на рисунке 1 эта окрестность имеет радиус δ) , что если x будет лежать в этой окрестности, то соответствующее значение y, равное x^2, попадет в ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Это заключение справедливо для любого, сколь угодно малого числа ε. Здесь точка $x_0 = 2$ выбрана произвольно. Можно было бы для данной функции выбрать любую другую точку и сделать подобное заключение.

Рассмотрим функцию $y = \dfrac{2x^2 - 5x - 2}{x - 2}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 2$. При $x_0 \neq 2$ её можно преобразовать:

$$y = \frac{2(x-2)(x-0{,}5)}{x-2} = 2x - 1.$$

График функции представлен на рисунке 2. Хотя исходная функция не определена в точке $x_0 = 2$ и естественно не равна 3 в этой точке, точка $y_0 = 3$ имеет характерную особенность. Выбрав положительное число ε, можно утверждать,

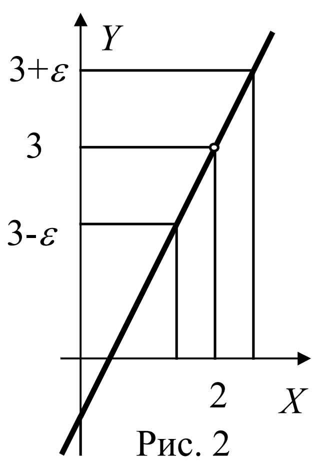

Рис. 2

что если рассматривать значения x, расположенные достаточно близко к точке $x_0 = 2$ (или лежащие в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$, причем радиус этой окрестности зависит от ε), то соответствующие значения y попадут в ε-окрестность точки $y_0 = 3$. Всё сказанное остаётся справедливым независимо от того, насколько малым выбрано положительное число ε.

Введем понятие предела функции. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 (иногда говорят, при x, стремящемся к x_0), если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 соответствующие значения y попадают в ε-окрестность точки $y = A$.

Можно сформулировать определение предела функции по-другому. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

выполняется условие

$$|y - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, записывается формулой

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

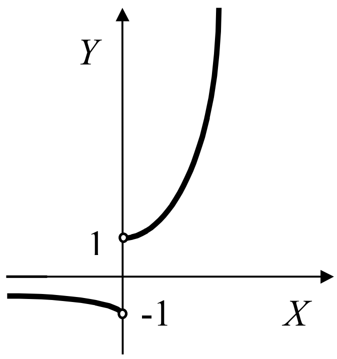

Рис. 3

Как видно из второго из рассмотренных выше примеров, для того, чтобы функция имела предел в точке $x = x_0$, не требуется, чтобы она была определена в этой точке.

Рассмотрим функцию $y = \frac{|x|}{x} 2^x$. Очевидно, что если $x > 0$, то $y = 2^x$; если $x < 0$, то $y = -2^x$; при $x = 0$ функция не определена.

График функции изображен на рисунке 3. Легко убедиться в том, что, согласно приведенному выше определению предела, эта функция в точке $x = 0$ предела не имеет.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x = x_0$, если она определена в этой точке и ее значение $f(x_0)$ равно пределу функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = 2$, как и во всех точках числовой оси. Функция $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ не является непрерывной в точке $x = 2$. Функция $y = \frac{|x|}{x} 2^x$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

Функция, непрерывная в каждой точке открытого промежутка, называется **непрерывной на этом промежутке**.

Приведем свойства предела функции.

1. Функция не может иметь в одной точке два разных предела.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, если C — постоянная функция.
3. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и C — постоянная функция, то

$$\lim_{x\to x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x\to x_0} f(x).$$

4. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, а также существует $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x))$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Если при этом $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)/g(x))$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Введем определения так называемых “односторонних пределов”.

Число B называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** a **справа** (это записывается в виде формулы $B = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое что из из условия $0 < x - a < \delta$ будет следовать $|B - f(x)| < \varepsilon$.

Согласно приведенному определению $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$. Отметим, что обыкновенного предела функция $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 0$ не имеет.

Число C называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** b **слева** (это записывается в виде формулы $C = \lim\limits_{x \to b-} f(x)$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что из условия $0 < b - x < \delta$ будет следовать $|C - f(x)| < \varepsilon$.

Очевидно, что функция $y(x) = \frac{|x|}{x} 2^x$ (её график, изображен на рисунке 3) имеет два односторонних предела в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = 1; \quad \lim_{x \to 0-} y(x) = -1.$$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** a **справа** (непрерывной в точке b слева), если

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x \to b-} f(x) = f(b) \right).$$

Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке x=0.

Функция называется **непрерывной на замкнутом промежутке** $[a, b]$, если она непрерывна на открытом промежутке (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Достаточно просто можно доказать теорему, связывающую понятия предела функции в точке и односторонних пределов. Мы ограничимся только формулировкой теоремы.

Для того, чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, **необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два равенства:**

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = A; \quad \lim_{x \to x_0 -} f(x) = A$$

В дальнейшем нам понадобятся понятия предела функции в бесконечно удалённых точках. Рассмотрим сначала функцию $f(x)$, определенную на полубесконечном промежутке $(x_0; \infty)$. **Число** A **называется пределом функции** $f(x)$ **при** x, **стремящемся к бесконечности**:

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x),$$

если для любого положительного числа ε **можно найти такое положительное число** M **(зависящее от** ε), **что для всех чисел** x, **превосходящих** M, **выполняется условие**:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на полубесконечном промежутке $(-\infty; x_0)$. **Число** A **называется пределом функции** $f(x)$ **при** x, **стремящемся к минус бесконечности**:

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

если для любого положительного числа ε **можно найти такое положительное число** M **(зависящее от** ε), **что для всех чисел** x, **меньших, чем** $-M$, **выполняется условие**:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Отметим два, так называемых, "замечательных предела".

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Геометрический смысл этой формулы заключается в том, что прямая $y = x$ является касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$. Здесь e — иррациональное число, приблизительно равное 2,72.

Приведем пример применения понятия предела функции в экономических расчетах. Рассмотрим обыкновенную финансовую сделку: предоставление в долг суммы S_0 с условием, что через период времени T будет возвращена сумма S_T. Определим величину r **относительного роста** формулой

$$r = \frac{S_T - S_0}{S_0}. \qquad (1)$$

Относительный рост можно выразить в процентах, умножив полученное значение r на 100.

Из формулы (1) легко определить величину S_T:

$S_T = S_0(1 + r)$

При расчете по долгосрочным кредитам, охватывающим несколько полных лет, используют схему сложных процентов. Она состоит в том, что если за 1-й год сумма S_0 возрастает в $(1 + r)$ раз, то за второй год в $(1 + r)$ раз возрастает сумма $S_1 = S_0(1 + r)$, то есть $S_2 = S_0(1 + r)^2$. Аналогично получается $S_3 = S_0(1 + r)^3$. Из приведенных примеров можно вывести общую формулу для вычисления роста суммы за n лет при расчете по схеме сложных процентов:

$$S_n = S_0(1 + r)^n.$$

В финансовых расчетах применяются схемы, где начисление сложных процентов производится несколько раз в году. При этом оговариваются **годовая ставка** r и **количество начислений за год** k. Как правило, начисления производятся через равные промежутки времени, то есть длина каждого промежутка T_k составляет $\frac{1}{k}$ часть года. Тогда для срока в T лет (здесь T не обязательно является целым числом) сумма S_T рассчитывается по формуле

$$S_T = S_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^m \qquad (2)$$

Здесь $m = \left[\frac{T}{T_k}\right]$ — целая часть числа $\frac{T}{T_k}$, которая совпадает с самим числом, если, например, T - целое число.

Пусть годовая ставка равна r и производится n начислений в год через равные промежутки времени. Тогда за год сумма S_0 наращивается до величины, определяемой формулой

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \qquad (3)$$

В теоретическом анализе и в практике финансовой деятельности часто встречается понятие “непрерывно начисляемый процент”. Чтобы перейти к непрерывно начисляемому проценту, нужно в формулах (2) и (3) неограниченно увеличивать соответственно, числа k и n (то есть устремить k и n к бесконечности) и вычислить, к какому пределу будут стремиться функции S_T и S_1. Применим эту процедуру к формуле (3):

$$S_1^* = \lim_{n\to\infty} S_1 = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r = S_0\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right\}^r.$$

Заметим, что предел в фигурных скобках совпадает со вторым замечательным пределом. Отсюда следует, что при годовой ставке r при непрерывно начисляемом проценте сумма S_0 за 1 год наращивается до величины S_1^*, которая определяется из формулы

$$S_1^{\ *} = S_0 e^r. \qquad (4)$$

Пусть теперь сумма S_0 предоставляется в долг с начислением процента n раз в год через равные промежутки времени. Обозначим r_e годовую ставку, при которой в конце года сумма S_0 наращивается до величины $S_1^{\ *}$ из формулы (4). В этом случае будем говорить, что r_e — это **годовая ставка при начислении процента *n* раз в год, эквивалентная годовому проценту *r* при непрерывном начислении.** Из формулы (3) получаем

$$S_1^{\ *} = S_0\left(1+\frac{r_e}{n}\right)^n.$$

Приравнивая правые части последней формулы и формулы (4), полагая в последней $T = 1$, можно вывести соотношения между величинами r и r_e:

$$r = n\ln\left(1+\frac{r_e}{n}\right), \quad r_e = n\left(e^{\frac{r}{n}} - 1\right).$$

Эти формулы широко используются в финансовых расчётах.