Дифференцирование функций, заданных таблично

Для функции, заданной таблицей, найти разностные производные всех типов. Найти эластичность этой функции, применяя для производной разностный аналог “вперед”.

x	1	1,2	1,3	1,55
y(*x*)	10	13	15,5	16,5

Из таблицы следует, что функция задана таблично на отрезке [1; 1,55] с переменным шагом. Напомним, что разностная производная “назад” не вычисляется в левой границе отрезка табулирования (т.е. при $x = 1$), разностная производная “вперед” не вычисляется в правой границе отрезка табулирования (т.е. при $x = 1{,}55$), “центральная” разностная производная не вычисляется ни в правой, ни в левой границе отрезка табулирования. Соответственно, эластичность

$$E(y) = y'\frac{x}{y}$$

с применением для производной разностного аналога “вперед” не вычисляется в правой границе отрезка табулирования.

Организуем данные, как показано на рисунке.

	A	B	C	D	E	F
1	x	y(x)	y'(x) назад	y'(x) вперед	y'(x) центр.	Эластич. вперед
2	1	10	Не выч.	=(B3-B2)/(A3-A2)	Не выч.	=(B3-B2)/(A3-A2)*A2/B2
3	1,2	13	=(B3-B2)/(A3-A2)	Копир ↓	=(B4-B2)/(A4-A2)	Копир ↓
4	1,3	15,5	Копир ↓	.	Копир ↓	
5	1,55	16,5		Не выч.	Не выч	Не выч

Результаты представлены на следующем рисунке.

	A	B	C	D	E	F
1	x	y(x)	y'(x) назад	y'(x) вперед	y'(x) центр.	Эластич. вперед
2	1	10	Не выч	15	Не выч	1,5
3	1,2	13	15	25	18,333	2,308
4	1,3	15,5	25	4	10	0,335
5	1,55	16,5	4	Не выч	Не выч	Не выч

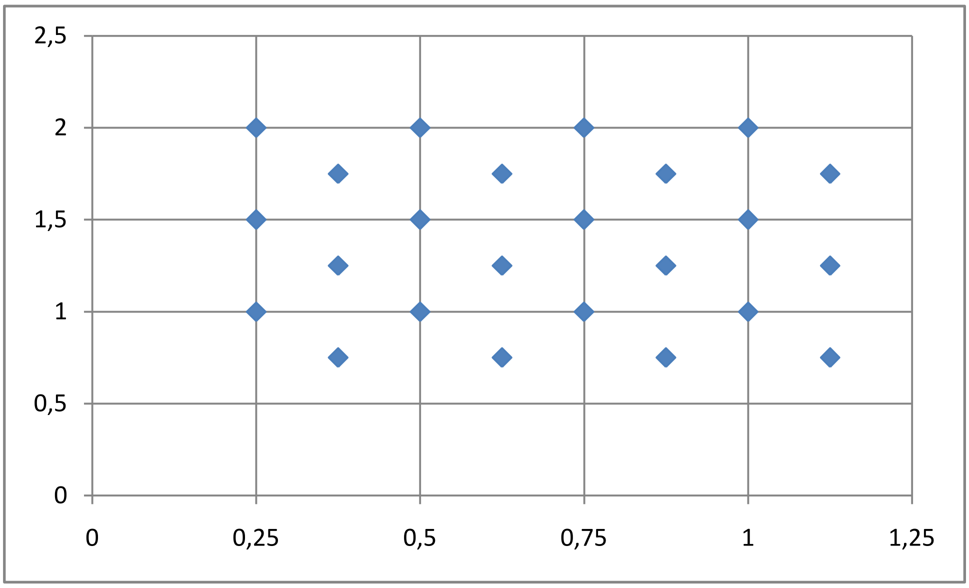
Оценка двойных интегралов по прямоугольной области

Оценить двойной интеграл

$$\iint f(x,y)dxdy$$

по прямоугольной области D: 0,25<= x <=1,25; 0,5<= y <=2.
Шаги разбиения $\Delta x = 0{,}25$, $\Delta y = 0{,}5$, промежуточные точки - верхние левые углы.

Область D разбивается на прямоугольники (будем называть их “элементарными”). Всего таких прямоугольников 12. Центры этих прямоугольников отмечены на рисунке. Площадь каждого, очевидно,



равна $\Delta x \cdot \Delta y \ = 0{,}25 \cdot 0{,}5$.

Находятся значения подынтегральной функции в верхних левых углах (см. рисунок) элементарных прямоугольников $f(x_i, y_j)$, эти значения умножаются на площадь $\Delta x \cdot \Delta y$ и все произведения складываются. Полученная сумма дает приближенное значение двойного интеграла. То есть

$$\iint f(x,y)dxdy \approx \sum\sum f(x_i,y_j)\Delta x\Delta y = \Delta x\Delta y \sum\sum f(x_i,y_j).$$

Таким образом, оценка интеграла равна сумме значений подынтегральной функции в верхних левых углах элементарных прямоугольников умноженной на площадь элементарного прямоугольника.

На практике также применяются и другие способы оценки двойных интегралов, отличающиеся большей точностью (и большей сложностью).

Из курса математики известно, что рассмотренный интеграл можно записать в форме повторного интеграла

$$\int_{0,25}^{1,25} dx \int_{0,5}^{2} f(x,y)dy$$

Пусть $f(x,y) = \sin(x+2y)$, тогда двойной интеграл по заданной области можно записать в следующей форме:

$$\int_{0,25}^{1,25} dx \int_{0,5}^{2} \sin(x+2y)\, dy$$

Для оценки интеграла организуем данные, как показано на рисунке

	A	B	C	D	E	F
1	2,0	=SIN(B$5+2*$A1)	Копир →			
2	1,5	Копир ↓				
3	1,0					
4	0,5					
5	y/x	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25

В колонку А вводим пошаговые значения *y* от 2,0 до 0,5. В строку 5 вводим пошаговые значения *x* от 0,25 до 1,25.

В ячейку B1 вводим формулу для вычисления подынтегральной функции. Для последующего корректного копирования “замораживаем” колонку А и строку 5 (вспомните правило формирования матриц).

Копируем формулу во все ячейки диапазона B1:F4.

Находим сумму значений ячеек из диапазона B1:E3 (верхние левые углы).

Полученную сумму умножаем на 0,25*0,5.

Ответ: оценка интеграла I^* = - 0,465. Точное значение интеграла равно -0,1035.

Упражнение. Получить оценки интеграла, вычисляя значения подынтегральной функции в разных промежуточных точках: верхних правых, нижних левых и нижних правых углах элементарных прямоугольников.

Ответы:

верхние правые углы, суммируется диапазон C1:F3, I^*= - 0,669;

нижние левые углы, суммируется диапазон B2:E4, I^*= 0,494;

нижние правые углы, суммируется диапазон C2:F4, I^*= 0,263.

Полученные оценки отличаются от точного значения в разы. Однако среднее арифметическое всех четырех оценок равно -0,094, что дает относительную погрешность 9%.

Упражнение. Решить предыдущую задачу, приняв шаги разбиения равными $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}1$.

Ответ: $I^*_{\text{верх.лев.}}$= - 0,151; $I^*_{\text{верх.прав.}}$= - 0,245; $I^*_{\text{нижн.лев.}}$= 0,040; $I^*_{\text{нижн.прав.}}$= - 0,056.

$I^*_{\text{сред.арифм.}}$= - 0,1031. Относительная погрешность для средней арифметической равна 0,42%.

Упражнение. Оценить интеграл $\iint x^3 y dx dy$ по области D: 0<= x <=1; 0 <= y <=2, если $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}2$. Промежуточные точки – левые верхние углы. Найти относительную погрешность.

Ответ: $I^*_{\text{верх.лев.}}$ =0,446, относительная погрешность =10,8%.

Замечание. В качестве промежуточных точек можно взять центры элементарных прямоугольников. Попробуйте оценить трудоемкость реализации этого варианта на EXCEL. Выскажите предположения относительно точности получаемых оценок в этом случае.

Упражнение. Оценить интеграл

$$\int_0^2 dx \int_0^2 (x + 2y + 3xy) dy$$

Считать, что $\Delta x = 0{,}2,\ \Delta y = 0{,}25$, промежуточные точки – левые верхние углы. Найти относительную погрешность (точное значение интеграла равно 28).

Ответ: $I^*_{\text{верх.лев.}}$=24,750, относительная погрешность 11,607%.

Упражнение. Оценить интеграл из предыдущего примера, используя в качестве промежуточных точек верхние правые углы. Шаги разбиения те же.

Ответ: $I^*_{\text{верх.прав.}}$=28,250, относительная погрешность 0,893%.

Построение графиков решений дифференциальных уравнений

Решить (приближенно) на отрезке [1, 3] дифференциальные уравнения

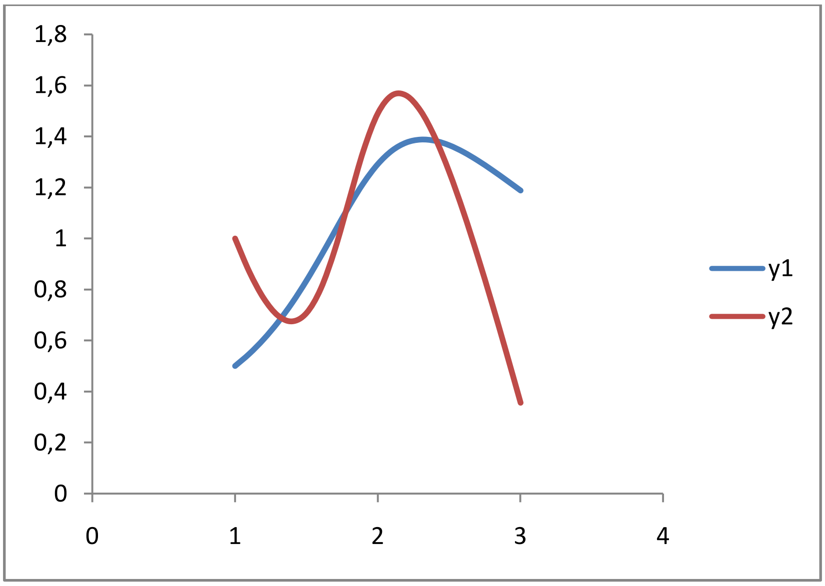
$$\frac{dy}{dx} = \sin(xy), \qquad y(1) = 0{,}5$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos(3x + y), \quad y(1) = 1$$

методом Эйлера с шагом $\Delta x = 0{,}1$. Построить на одной диаграмме графики решений. В ответ записать значения решений в точке $x = 3$ и количество точек пересечений графиков. Найти чувствительность решений к увеличению начальных значений на 0,2 (ответ дать в процентах).

	A	B	C
1	x	Y1	Y2
2	1	0,5	1
3	1,1	=B2+SIN(A2*B2)*0,1	=C2+2*COS(3*A2+C2)*0,1
4	1,2	Копир ↓	Копир ↓

Для построения графиков на одной диаграмме выделяем диапазон A1:C22 и строим точечную диаграмму ($y1(x)$, $y2(x)$ – решения первого и второго уравнений соответственно).



Ответ: y1(3)=1,187; y2(3)= 0,356; 3 пересечения.

Для определения чувствительности заменим начальные значения (ячейки B2 и C2) соответственно на 0,7 и 1,2. Новые значения: y1(3)=1,201; y2(3)= 0,473. Чувствительность равна 1,193% и 32,912% соответственно для первого и второго уравнений.

Построение кривой Лоренца и вычисление коэффициента Джини

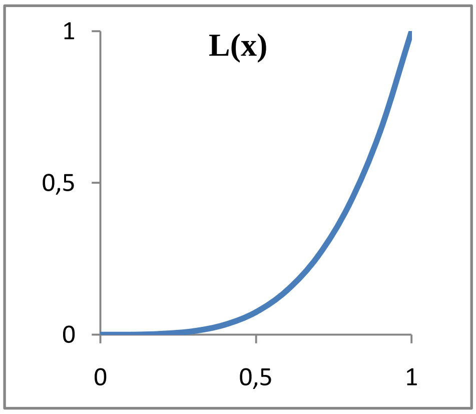
Для 10-ти семей задана функция дохода $V(i) = i^3$, где i - номер семьи, $V(i)$ −ее доход.

Функция Лоренца $L(x)$—доля доходов, приходящаяся на $x \cdot 100\%$ семей с наименьшими доходами ($0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq L(x) \leq 1$)

Протабулировать функцию Лоренца, построить ее график и вычислить коэффициент Джини, применяя интегрирование по методу трапеций. Функцию Лоренца считать равной 0 при x = 0, т.е. L(0) = 0.

	A	B	C	D	E
1	Номер Семьи i	Доход Семьи $V(i)$	Доля Семей x	Доля доходов $L(x)$	Суммарный доход всех семей
2			0	0	
3	1	=A3^3	=A3/10	=B3/$E$3	=СУММ(B3:B12)
4	2	Копир. ↓	Копир. ↓	=D3+B4/$E$3	Интеграл по ф-ле трапеций
5	3			Копир. ↓	(СУММ(D3:D11)+ 0,5*(D2+D12))*1/10

Так как доходы семей идут в возрастающем порядке, сортировка по доходам (столбец B) не нужна.



В ячейки C2 и D2 вводим нули (определение функции Лоренца в нуле).

Для первой семьи доля дохода вычисляется по своей формуле (ячейка D3). Для последующих семей доля вычисляется по другой, но одной и той же формуле: доля, приходящаяся на предыдущие семьи плюс доля, приходящаяся на очередную семью (ячейка D4).

Коэффициент Джини вычисляем по формуле $G = 1 - 2B$, где

$$B = \int_0^1 L(x)dx$$

Интеграл вычисляем по формуле трапеций. Шаг, очевидно, равен 0,1.

Ответ: B = 0,213, G = 0,575.

Пример шаблона организации данных для решения задачи линейного программирования (ЗЛП)

Найти максимум выражения $50x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 30x_4$ при ограничениях:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200$

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \quad <= 600$

$9x_1 + 8x_2 \quad + 7x_4 <= 700$

$x_1, x_2, x_3, x_4 >= 0$ (неотрицательность переменных).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		X1	X2	X3	X4	Сумм произв		
2		1	1	1	1			
3								
4	Огр1	1	1	1	1		=	200
5	Огр2	1	2	4	0		<=	600
6	Огр3	9	8	0	7		<=	700
7	Цель	50	60	20	30		макс	

Заполняем таблицу, как показано на рисунке. Стартовые значения переменных полагаем равными 1 (диапазон B2:E2).

В строки 4-6,7 вводим коэффициенты при неизвестных в функциях-ограничениях и в максимизируемой целевой функции.

В колонку H вводим правые части функций-ограничений.

Вводим в F4 формулу =СУММПРОИЗВ($B$2:$E$2;B4:E4) и копируем вниз до F7 включительно (ссылка на ячейки с изменяемыми переменными абсолютна).

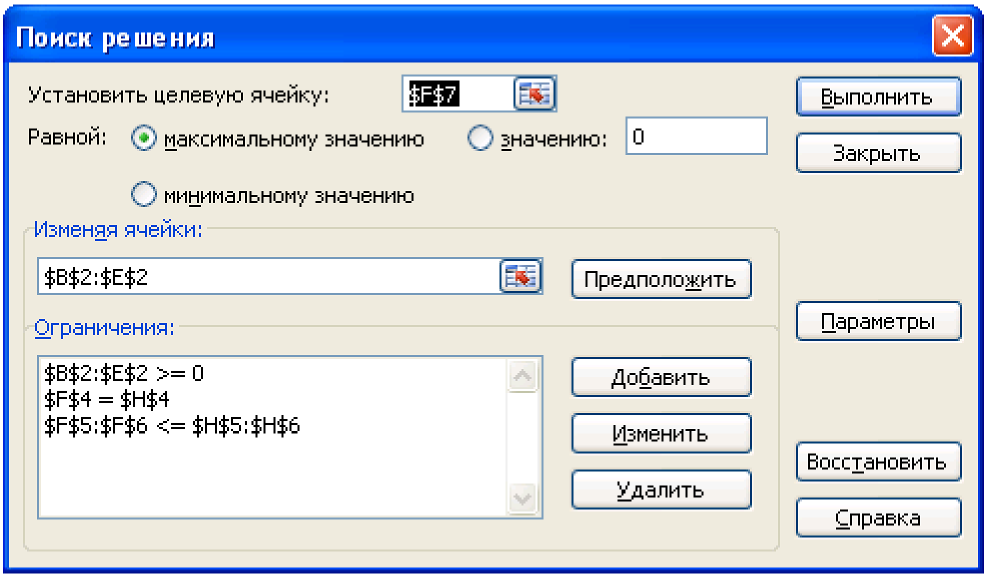
Вызываем программу “ Поиск решения” и устанавливаем параметры поиска, как показано на рисунке.

Цель поиска –“Максимальное значение”.

B2:E2 >= 0 (вводим в поле ССЫЛКА НА ЯЧЕЙКУ сразу весь диапазон со стартовыми значениями переменных).

F4 = H4 (ограничение-равенство).

F5:F6 <= H5:H6 (вводим в поле ССЫЛКА НА ЯЧЕЙКУ сразу обе ячейки F5:F6, а в поле ОГРАНИЧЕНИЕ сразу обе ячейки H5:H6; так можно делать, так как тип ограничения “<=” у функций совпадает).



Ответ: максимум равен 7222,2 и достигается при
x_1=0, 1, x_2=77,8, x_3=111,1, x_4=11,1.

Пример, в котором переменные снабжены двумя индексами.

Найти минимум выражения $30x_{11} + 20x_{12} + 25x_{13} + 15x_{21} + 35x_{22}+40x_{23}$ при ограничениях:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} <= 450$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} <= 650$

$x_{11} + x_{21} = 300$

$x_{12} + x_{22} = 200$

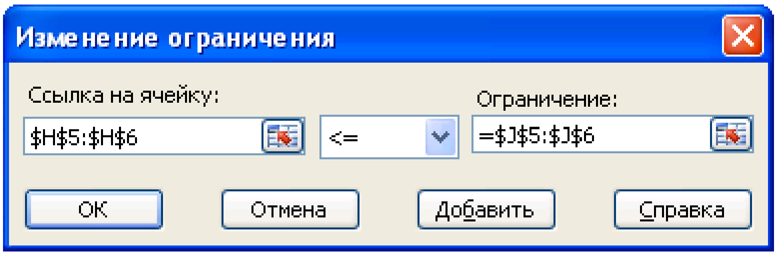
$x_{13} + x_{23} = 500$, $x_{ij} >= 0$ (неотрицательность переменных).

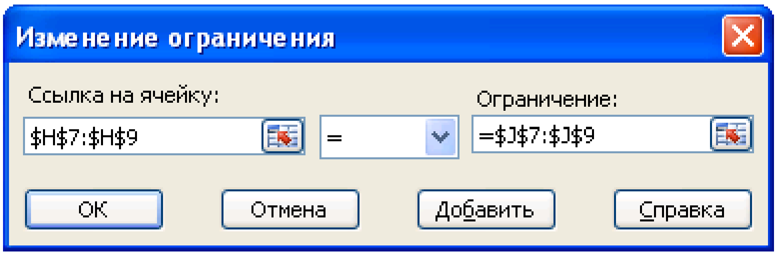
Заполняем таблицу, как показано на рисунке. Стартовые значения переменных полагаем равными 1 (диапазон B2:G2).

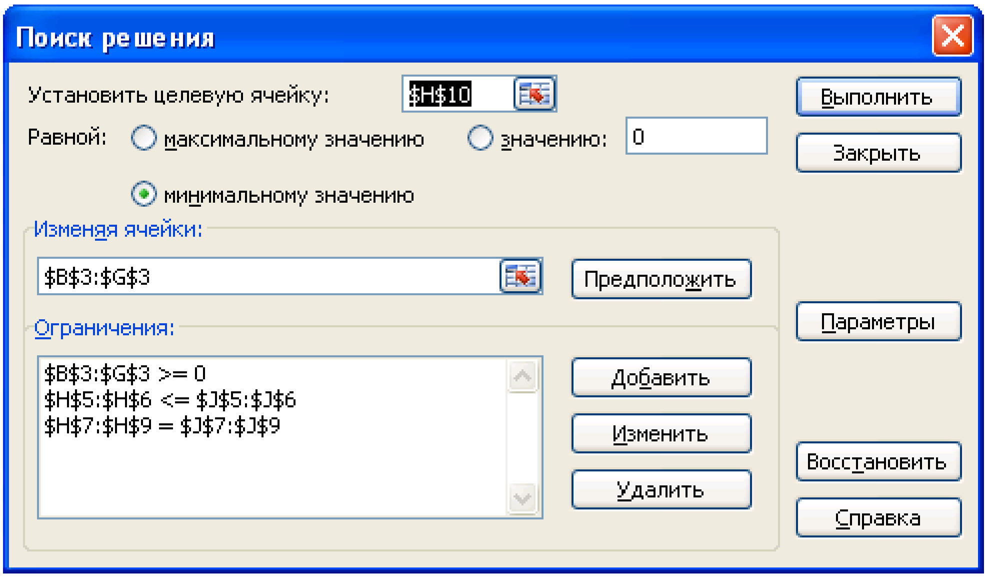
Вводим в H2 формулу =СУММПРОИЗВ($B$2:$G$2;B4:G4) и копируем вниз до H9 включительно (ссылка на ячейки с изменяемыми переменными абсолютна). В колонку J (J4:J8) вводим правые части функций-ограничений.

Вызываем программу “ Поиск решения” и устанавливаем параметры поиска, как показано на рисунке.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		X11	X12	X13	X21	X22	X23	Сумм произв		
2		1	1	1	1	1	1			
3										
4	Огр1	1	1	1	0	0	0		<=	450
5	Огр2	0	0	0	1	1	1		<=	650
6	Огр3	1	0	0	1	0	0		=	300
7	Огр4	0	1	0	0	1	0		=	200
8	Огр5	0	0	1	0	0	1		=	500
9	Цель	30	20	25	15	35	40		минимум	







Ответ: минимум равен 24750 и достигается при
x_{11}=0, x_{12}=125, x_{13}=325, x_{21}=300, x_{22} =75, x_{23}=175.

Анализ чувствительности решения ЗЛП к изменению правых частей функций-ограничений

В последнем примере ЗЛП имеет 5 функций-ограничений (не считая стандартного требования неотрицательности переменных). Исследуем чувствительность решений к изменению правых частей этих функций.

Под чувствительностью будем понимать следующее: на сколько изменится оптимальное значение целевой функции при увеличении правой части одной из функций-ограничений на единицу (остальные ограничения при этом не меняются).

Меняем правую часть первого ограничения с 450 на 451 и запускаем ПОИСК РЕШЕНИЯ без изменения параметров поиска.

Восстанавливаем исходное значение 450. Меняем 650 на 651 во втором ограничении и запускаем ПОИСК РЕШЕНИЯ. И т.д. Результаты приведены в таблице.

	Исходное	Увеличенное	Изменение целевой ф-ии
Огр1	450	451	-15
Огр2	650	651	0
Огр3	300	301	15
Огр4	200	201	35
Огр5	500	501	40

Чувствительность к первому ограничению равна -15. Ко второму ограничению чувствительность равна 0. Самая большая чувствительность к пятому ограничению: 40.

Упражнение. Найти наибольшее значение выражения $2a + 2b + 3c + 4d$ при ограничениях:

$a + b + c + d <= 400$

$a + 3b + 2c + d <= 750$

$a + 2b + c + 6d <= 500$

$a + 4b + 4c + d <= 1500$

a, b, c, d – неотрицательны.

Ответ: 1190.

Задача о вероятности совпадения дней рождения в группе из n человек

Пусть в группе n = 25 человек. Обозначим A– событие, состоящее в том, что у всех в группе разные дни рождения. По классической схеме вероятность определяем по формуле (предполагаем, что все рождены не в високосный год)

$$P(A) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 341}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} = \prod_{k=0}^{24} \frac{365 - k}{365} = 0{,}431$$

Вероятность того, что хотя бы у двоих совпадут дни рождения, находится как вероятность противоположного события

$$1 - P(A) = 0{,}569$$

Применение комбинаторных функций

В курсе математического анализа доказывается, что

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

(разложение в бесконечный ряд Тейлора).

Если в ряде Тейлора взять конечное число членов (например, 5), то будет справедливо приближенное равенство

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Упражнение. Используя функцию EXP для вычисления точного значения экспоненты, найти абсолютную и относительную погрешность приближения числа $\sqrt{e}$ пятью членами ряда Тейлора.

Ответ: абсолютная погрешность 0,00028, относительная погрешность 0,017%.

Упражнение. Какое минимальное число членов ряда Тейлора нужно взять, чтобы получить число e^2 с относительной погрешностью меньше 1%.

Ответ: 7 членов дают погрешность 0,45%.

Упражнение. Решить уравнения и неравенства (найти натуральные n)

$$\mathrm{C}_{n+3}^{n} - C_{n+2}^{n-1} = 15(n+1)$$

$$\frac{P_{n+5}}{P_{n-к}} = 240A_{n+3}^{k+3}$$

$$C_{10}^{n} > 2C_{10}^{n+1}$$

$$4(n-1)!\,A_{n+2}^{4} < 143n!$$

Упражнение. Найти суммы

$$\sum_{k=1}^{10} kC_{10}^{k}$$

$$\sum_{k=1}^{9} \frac{(-1)^{k+1}C_{9}^{k}}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{8} C_{16}^{2k}$$